

1

MATRICES I: DEFINICIONES Y PROPIEDADES.

En este primer tema vamos a estudiar lo que conocemos como matriz. Para ello, veremos sus principales propiedades y operaciones. Calcularemos la matriz inversa de una matriz dada, en el caso de que esta tuviese, por los métodos que se conocen y finalmente, veremos la aplicación de las matrices a los grafos, dando a conocer algunos conceptos básicos sobre estos.

Las matrices, tienen una gran aplicación en todo lo que tiene que ver con la informática, geometría, la teoría de control y otras muchas más ramas de conocimiento. Es por ello, que su conocimiento tiene una gran importancia en la vida diaria, aunque solo aquellos que se dedican a su uso, son los que realmente conocen de esta materia.

1.1 Introducción. Conceptos básicos.

Comenzamos dando la definición de matriz.

Definición 1.1 (Matriz)

Definimos una matriz como un conjunto de números dispuestos en filas y columnas representados de la siguiente forma:

$$A_{m \times n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

donde los $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ son los elementos de la matriz, con $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq m$, donde el subíndice i indica la fila a la que pertenece el elemento y el subíndice j la columna.

De este modo, cada elemento de la matriz queda determinado y a su vez, la matriz completa. Representaremos las matrices por letras mayúsculas cuyo subíndice representa el tamaño de esta.

Las matrices pueden tener distintos tamaños, o lo que formalmente conocemos como orden ó dimensión:

Definición 1.2 (Dimensión de una matriz)

Definimos la dimensión de una matriz como el número de filas por el número de columnas que esta presenta. Lo denotamos por $n \times m$, donde n es el número de filas y m el número de columnas.

Los matemáticos, solemos poner nombre a casi todas las cosas. Por ello, dependiendo de las dimensiones de una matriz, distinguimos varias de ellas.

Definición 1.3 (Matriz rectangular)

Decimos que una matriz es rectangular, cuando tiene distinto número de filas que de columnas, es decir, $n \neq m$. Su dimensión por tanto es $n \times m$.

Definición 1.4 (Matriz cuadrada)

Decimos que una matriz es cuadrada, cuando tiene el mismo número de filas que de columnas, es decir, $n = m$. Su dimensión es por tanto $n \times n$.

Definición 1.5 (Matriz fila)

Decimos que una matriz es una matriz fila, cuando solo tiene una fila, es decir $n = 1$. Si dimensión es $1 \times m$.

Definición 1.6 (Matriz columna)

Decimos que una matriz es una matriz columna, cuando solo tiene una columna, es decir $m = 1$. Si dimensión es $n \times 1$.

Definición 1.7 (Matriz nula)

Decimos que una matriz es nula cuando todos sus elementos son cero. La representamos por O .

La diagonal principal de una matriz es aquella que cruza la matriz de izquierda a derecha y de arriba a abajo, es decir:

$$\begin{pmatrix} diagonal & \cdots & \cdots \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \cdots & \cdots & principal \end{pmatrix}$$

Definición 1.8 (Matriz diagonal)

Decimos que una matriz es diagonal, cuando todos los elementos, salvo los de la diagonal principal, son ceros. Las representamos por $D_{n \times n}$.

N Las matrices diagonales son todas matrices cuadradas.

Definición 1.9 (Matriz identidad)

Definimos la matriz identidad, como la matriz diagonal, cuyos elementos de la diagonal principal son todos unos. La denotamos por I_n donde n es el orden de la matriz.

Diremos que dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y los elementos situados en el mismo sitio en ambas matrices, tienen el mismo valor.

Veamos ejemplos de estas definiciones.

Ejemplo 1.1

Construir una matriz columna con tres filas, una matriz fila con cuatro columnas, una matriz cuadrada de orden dos, la matriz nula de orden dos, una matriz diagonal de orden dos y la matriz identidad de orden tres. Indica la dimensión de cada una.

Solución: Una matriz columna de tres filas es por ejemplo:

$$A_{3 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Una matriz fila de cuatro columnas es por ejemplo:

$$B_{1 \times 4} = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$$

Una matriz cuadrada de orden dos es por ejemplo:

$$C_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

La matriz nula de orden dos es:

$$O_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Una matriz diagonal de orden dos es por ejemplo:

$$D_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz identidad de orden tres es:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definición 1.10 (Matriz traspuesta)

Dada una matriz $A_{n \times m}$, definimos la matriz traspuesta como aquella que obtenemos de intercambiar las filas por las columnas. La denotamos por $A_{m \times n}^t$.

(N) Si tenemos una matriz fila, su traspuesta es una matriz columna y viceversa.

Definición 1.11 (Matriz simétrica)

Dada una matriz $A_{n \times m}$ cuadrada, decimos que es simétrica si $A = A^t$.

(N) Podemos ver que una matriz es simétrica, si los elementos a un lado y al otro de la diagonal principal son los mismos.

Definición 1.12 (Matriz antisimétrica)

Dada una matriz $A_{n \times m}$ cuadrada, decimos que es antisimétrica si $A = -A^t$, es decir, A es igual a su traspuesta pero con los signos cambiados.

(N) Para que una matriz sea antisimétrica, todos los elementos de la diagonal principal han de ser 0.

Ejemplo 1.2

Calcula las traspuestas de las siguientes matrices y, si es posible, confirma si hay alguna matriz simétrica y antisimétrica:

$$A_{1 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_{4 \times 1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -6 \\ 0 & -6 & 8 \end{pmatrix} \quad H_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: La matriz A es una matriz fila, por lo tanto no puede ser simétrica ni antisimétrica. Su traspuesta es

$$A_{3 \times 1}^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz B es una matriz columna, por lo tanto no puede ser simétrica ni antisimétrica. Su tras-

puesta es

$$B_{1 \times 4}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz C es una matriz cuadrada de orden 3, los elementos por encima y por debajo de la diagonal principal son los mismos y están colados de la misma forma, luego C es simétrica. Su traspuesta es

$$C_3^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -6 \\ 0 & -6 & 8 \end{pmatrix} = C_3.$$

La matriz H es una matriz cuadrada de orden 2, los elementos por encima y por debajo de la diagonal principal n son los mismos, por lo que no es simétrica. Como la diagonal principal todos los elementos son ceros, la matriz H es antisimétrica. Su traspuesta es

$$H_2^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -H_2.$$

1.2 Operaciones con matrices.

Una matriz, la podríamos considerar como un número. De echo, una matriz de dimensión 1 es un número: (1). Al igual que los números, las matrices se van a poder sumar, restar y multiplicar entre ellas. La división solo será posible entre una matriz y un escalar (valor numérico). Veamos como se realizan estas operaciones.

1.2.1 Suma y resta de matrices.

La suma y resta de matrices solo se puede realizar entre matrices de la misma dimensión, es decir, dadas dos matrices $A_{2 \times 2}$ y $B_2 \times 2$ si se pueden sumar, pero ninguna de ellas se podrá sumar con una matriz $C_3 \times 2$ ya que el número de filas de A y B no coincide con las de C .

La matriz suma tiene la misma dimensión que las matrices que intervienen en la operación.

Se realiza elemento a elemento, es decir, si tenemos estas dos matrices:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix},$$

entonces la nueva matriz suma es:

$$(A + B)_2 = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & a_{1,2} + b_{1,2} \\ a_{2,1} + b_{2,1} & a_{2,2} + b_{2,2} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.3

Dadas las matrices $A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -6 \\ 0 & -6 & 8 \end{pmatrix}$ y $B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, calcula $A + B$ y $B - A$.

Solución:

$$A + B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -6 \\ 0 & -6 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+1 & 1+1 & 0+0 \\ 1+1 & 5+0 & 2+(-6) \\ 0+1 & -6+(-1) & 8+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \\ 1 & -7 & 13 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -6 \\ 0 & -6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-2) & 1-1 & 0-0 \\ 1-1 & 0-5 & -6-2 \\ 1-0 & -1-(-6) & 5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -8 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

(N) A partir de ahora, no colocaremos el subíndice de la dimensión, ya que suponemos adquirida la habilidad para identificar la dimensión de las matrices con las que trabajaremos.

Propiedades de la suma (resta) de matrices.

La suma (resta) de matrices cumplen una serie de propiedades, al igual que los números y que son las siguientes.

Propiedades de la suma de matrices

- **Conmutativa:** $A + B = B + A$.
- **Asociativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- **Elemento neutro:** $A + O = A$, donde O es la matriz nula.
- **Elemento simétrico (opuesto):** $A + (-A) = O$.

1.2.2 Producto de un escalar por una matriz.

Si multiplicamos un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ por una matriz, todos los elementos de la matriz quedan multiplicados por ese escalar, es decir, si consideramos la siguiente matriz $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, entonces:

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha a_{1,1} & \alpha a_{1,2} \\ \alpha a_{2,1} & \alpha a_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Propiedades del producto de un escalar por una matriz.**Propiedades de la suma de matrices**

- **Asociativa:** $\alpha \cdot (\beta \cdot A) = (\alpha \cdot \beta) \cdot A$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- **Distributiva (respecto a la suma de matrices):**
 $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$, con $\alpha \in \mathbb{R}$.
- **Distributiva (respecto a la suma de escalares):**
 $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- **Elemento unidad:** $1 \cdot A = A$.

1.2.3 Producto de matrices.

El producto de matrices solo se puede realizar cuando el número de columnas de la matriz de la izquierda coincide con el número de filas de la matriz de la derecha, es decir, si tenemos dos matrices $A_{n \times m}$ y $B_{r \times k}$, entonces si $m = r$ se puede realizar el producto de las matrices A y B .

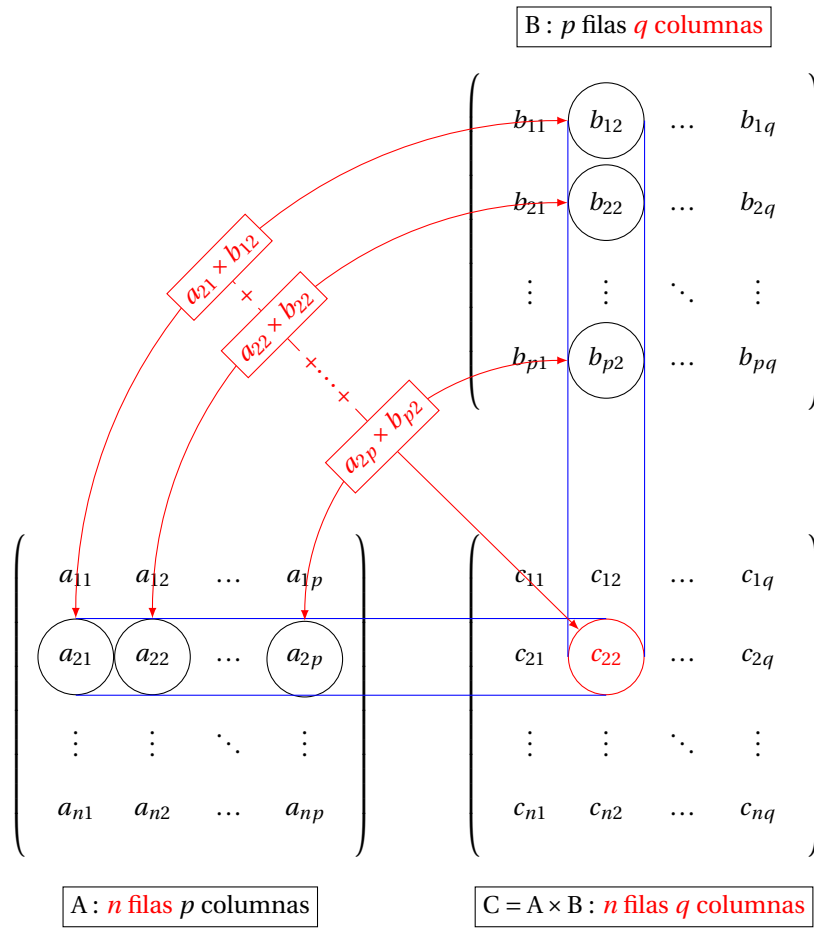
La matriz resultante es una matriz, cuyas dimensiones son las filas de la matriz de la izquierda y la columnas de la matriz de la derecha, es decir, en el caso anterior, la matriz resultante tendría dimensiones $n \times k$. De este modo, expresamos el producto de dos matrices por $A_{n \times m} \cdot B_{r \times k} = M_{n \times k}$.

El producto entre matrices se realiza multiplicando las filas de la matriz principal (izquierda) por las columnas de la matriz secundaria (derecha). Cada vez que hagamos esa operación, obtendremos un elemento de la matriz producto. Ese elemento de la matriz producto se obtiene como muestra el siguiente esquema:

Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ y $B_2 = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix}$. Tenemos que $A_{2 \times 2}$ y $B_{2 \times 2}$. Como el número de columnas de A (2) coincide con el número de filas de B , entonces se pueden multiplicar y el resultado es una matriz, cuyas dimensiones son las filas de A (2) por las columnas de B (2) es decir $A_{2 \times 2} \cdot B_{2 \times 2} = M_{2 \times 2}$. Veamos como se obtiene el producto de ellas.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \cdot B_2 = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{1,2} & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \\ a_{2,1}b_{1,1} + a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2} + a_{2,2}b_{2,2} \end{pmatrix}.$$

El siguiente esquema representa algo mejor lo que hemos realizado.



- (N) Hemos realizado el procedimiento para matrices de orden dos, pero se puede realizar para matrices de orden mayor que dos, siempre y cuando se puedan multiplicar.

Por experiencia se sabe que el producto de matrices es una de las herramientas que más cuesta entender a aquellos que se enfrentan por primera vez a ellas, es por ello que se recomienda realizar bastantes ejercicios. Veamos un ejemplo para ver si queda un poco más claro.

Ejemplo 1.4

Consideremos las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula si es posible los productos $A \cdot B$ y $A \cdot C$.

Solución: Primero, vemos que $A_{2 \times 2}$ y $B_{2 \times 3}$, luego el producto de ellas se puede realizar, dando lugar a una matriz $M_{2 \times 3}$, que es la siguiente:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 5 & 0 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 0 & 15 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ahora, $A_{2 \times 2}$ y $C_{3 \times 2}$, por lo que no se puede realizar el producto entre ellas, ya que el número de columnas de A (2) no coincide con el número de filas de C (3).

Potencia de matrices.

Como cualquier número real, la potencia de una matriz también se puede obtener, mediante el producto de las matrices, de modo que $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A$,... y así sucesivamente.

La peculiaridad es cuando hay matrices "cíclicas", es decir, que al multiplicarse una serie de veces entre ella misma, se obtiene de nuevo la primera matriz. Estas matrices son útiles ya que nos permiten obtener una potencia muy alta de la matriz (la que deseemos) con solo conocer el producto de muy pocas de ellas. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.5

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Veamos como calcular A^{347} .

Solución: Primero calculamos el producto de esta matriz por ella de forma reiterada, hasta obtener la primera matriz, es decir:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora, hacemos otra iteración para ver si podemos ver el camino que sigue.

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2 \\ 2^2 & 2^2 \end{pmatrix} = 2^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora se ve claro que $A^3 = 2^{3-1} \cdot A$, luego la matriz $A^{347} = 2^{347-1} \cdot A = 2^{346} \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{346} & 2^{346} \\ 2^{346} & 2^{346} \end{pmatrix}$.

Actividades

- 1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & -6 \end{pmatrix}$. Halla la matriz traspuesta de A y calcula $2 \cdot A^t$ y $A \cdot A^t$, si es posible. Razónalo.

- 2 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 16 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -3 & 1 \\ -2 & 227 \end{pmatrix}$.
Calcula $A + C$, $A + B$, $B + C$, $T + C$, $T + B$, $A^t + C^t$ y $B^t + T^t$, si es posible.

- 3 Demuestra que el producto de cualquier matriz cuadrada genérica de orden $n \in \mathbb{N}$ con la matriz identidad de ese mismo orden, es siempre esa matriz: $A \cdot I = I \cdot A = A$. ¿Ocurre lo mismo para una matriz no cuadrada?

- 4 Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -16 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$. Calcula $2A + C^t$, $A \cdot B$ y $B \cdot C$.

- 5 Calcula x, y, z, t para que se verifique:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- 6 Encuentra dos matrices cuadradas de dimensión dos A y B , que cumplan:

$$2A + B \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } A - B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 7 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, Prueba que $(A + I)^2 = 0$.

8 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$.

a) Prueba que $(A + I)^2 = O$.

b) Calcula a y b tal que $A^2 = aA + bI$.

9 Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula A^{12345} .

10 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calcula k para que $(A - kI)^2 = O$.

11 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula A^{128} .

1.3 Matriz inversa.

En este apartado, vamos a estudiar la matriz inversa de una matriz dada. Gracias a esta herramienta, podremos resolver ecuaciones matriciales. Vamos a ver dos formas de calcular la matriz inversa: por definición y por el método de Gauss.

Definición 1.13 (Matriz inversa)

Dada una matriz A cuadrada, decimos que tiene inversa, y la representamos por A^{-1} si verifica que $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

(N) No todas las matrices cuadradas tienen inversa.

Veamos un ejemplo de cálculo de la inversa de una matriz por definición.

Ejemplo 1.6

Calcula la matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución: Para ello tenemos que ver que $A \cdot A^{-1} = I$. Como A es de orden 2, y no conoce-

mos A^{-1} , la definimos genéricamente como $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. De este modo:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando obtenemos que

$$\begin{pmatrix} -a+2c & -b+2d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

luego necesariamente, como las dos matrices han de ser iguales, cada elemento de una matriz debe ser igual al elemento de la otra matriz, por lo tanto obtenemos un sistema de la forma:

$$\begin{cases} -a+2c=1 \\ -b+2d=0 \\ a=0 \\ b=1 \end{cases}$$

Resolviéndolo resulta $a=0$, $b=1$, $c=d=\frac{1}{2}$, luego la matriz inversa es

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- Ⓝ Para comprobar que no nos hemos equivocado en realizar las operaciones de cálculo de la inversa, una vez que hemos obtenido A^{-1} , es conveniente que se verifique que $A \cdot A^{-1} = I$.

Calculo de la inversa por Gauss.

El método de Gauss es quizás más trabajoso, pero nos permite identificar si una matriz tiene inversa o no. Consiste en operar entre las filas de la matriz, con lo que denominamos operaciones o transformaciones gaussianas, que no es más que sumar o restar filas multiplicadas por un valor. Debemos de realizar estas operaciones para que se verifique el siguiente procedimiento:

$$(A|I) = (I|A^{-1})$$

Es decir, debemos de transformar la matriz A mediante las transformaciones gaussianas, para obtener la matriz identidad. De este modo, a la derecha vamos a obtener la matriz inversa de esta.

- Ⓝ Como hemos comentado antes, con este método podemos determinar, que si al realizar las transformaciones gaussianas a una matriz obtenemos una fila de ceros, entonces la matriz no tiene inversa.

De nuevo, veamos un ejemplo de obtener la matriz inversa por Gauss.

Ejemplo 1.7

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, obtener su inversa por Gauss.

Solución: Inicialmente, colocamos la matriz y la identidad de la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Primero, debemos hacer un 1 en el primer elemento de la matriz, luego multiplicamos la fila 1 por -1 y lo escribimos $F'_1 = -1 \cdot F_1$, resultando:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ahora, los demás elementos que le siguen deben de ser 0, luego realizamos la siguiente operación gaussiana $F'_1 = F_1 + F_2$ (podemos operar con cualquier fila, pero siempre utilizamos la que nos sea más cómoda de aplicar para hacer las operaciones). Además siempre a la fila que queremos modificar le restamos o sumamos aquella que vamos a operar. Resulta en este caso:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Multiplicando ahora la fila dos por $\frac{1}{3}$, obtenemos que $F'_2 = \frac{1}{3} \cdot F_2$, luego:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Ya tenemos las dos primeras filas de la matriz identidad de orden 3 en el lado izquierdo. Hagamos operaciones para obtener la tercera y última. Primero $F'_3 = \frac{1}{2} \cdot F_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Ahora hacemos ceros los demás elementos mediante $F'_3 = F_3 - F_1$ y $F'_3 = F_3 - \frac{1}{2} \cdot F_2$, entonces finalmente obtenemos:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Luego la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & -\frac{7}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Actividades

- 1 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Halla la matriz traspuesta de A y calcula A^{-1} y $(A^t)^{-1}$ por la definición.
- 2 Halla la inversa de I_2 . ¿Qué ocurre?. ¿Qué pasará para matrices identidades de orden mayor?.
- 3 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Halla la matriz traspuesta de A y calcula A^{-1} y $(A^t)^{-1}$ por la definición.
- 4 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & -6 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}$. Calcula la inversa por definición y por Gauss y compara los resultados.
- 5 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula la inversa por definición y por Gauss y compara los resultados.
- 6 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa si es posible.

1.4 Aplicación: Teoría de grafos.

La teoría de grafos es una rama de las matemáticas que se encarga de “unir” elementos. ¿Cuántas veces de pequeños hemos jugado al juego de los “ceritos”? Cuando teníamos que unir los puntitos mediante rayas para cerrar el cuadrado. Realmente, estábamos trabajando con grafos.

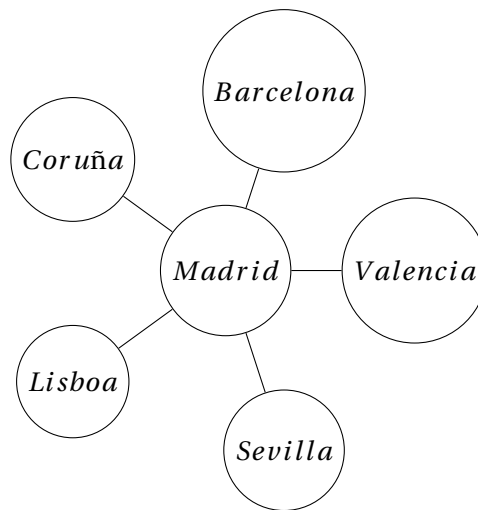
Los grafos especialmente aparece en los problemas de optimización de una red de carreteras y de transporte de cargas, en los que se pretende disminuir ciertos factores. En cuanto a la informática, el buscador web mundialmente conocido **Google**, tiene implementado un algoritmo, basado en grafos, el cual le permite localizar de forma rápida las páginas con la información que buscamos.

Sin entrar en detalles técnicos, pasamos a introducir una serie de conceptos fundamentales sobre grafos.

Definición 1.14 (Grafo)

Definimos un grafo G como un conjunto formado por vértices v y aristas a .

Un grafo podría ser el siguiente, que representa la red ferroviaria del ave entre ciudades españolas:



Las ciudades serían los vértices, y la red ferroviaria las aristas.

Los grafos pueden ser dirigidos, que son aquellos que marcan la dirección en la que se recorre el grafo, o no dirigidos, en los cuales no importa la dirección.

Los grafos, como era de esperar, se pueden representar en una matriz, que definimos a continuación.

Definición 1.15 (Matriz de adyacencia)

Definimos la matriz de adyacencia de un grafo como la matriz cuadrada que se utiliza para representar un grafo, de modo que sus filas y columnas, representan ordenadamente los vértices del grafo y cada elemento $a_{i,j}$ representa el número de aristas que une el vértice i con el vértice j .

(N) La matriz de adyacencia de un grafo es única.

La matriz de adyacencia del grafo de las ciudades sería la siguiente:

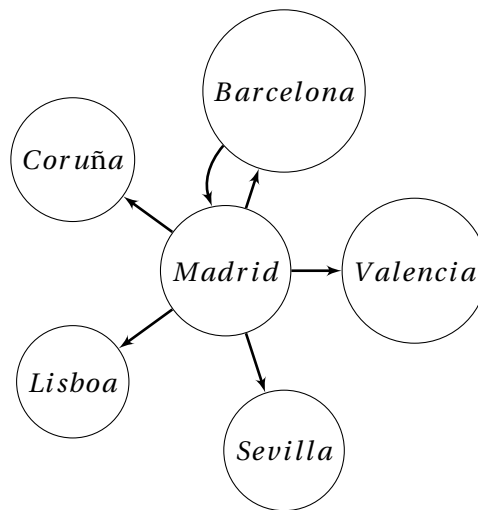
$$\begin{array}{c}
 M \quad B \quad V \quad S \quad L \quad C \\
 M \left(\begin{array}{cccccc}
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) \\
 B \\
 V \\
 S \\
 L \\
 C
 \end{array}$$

Podemos observar que Madrid se comunica con todas las ciudades, por eso, hay un 1 en cada elemento de que relaciona Madrid con otra ciudad.

Si consideramos ahora que hay dos aristas que comunican Madrid y Barcelona, la matriz de adyacencia sería:

$$\begin{array}{c}
 M \quad B \quad V \quad S \quad L \quad C \\
 M \left(\begin{array}{cccccc}
 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) \\
 B \\
 V \\
 S \\
 L \\
 C
 \end{array}$$

Sin embargo, si el grafo fuese dirigido como es el siguiente:



entonces la matriz de adyacencia cambiaría y sería la siguiente:

$$\begin{array}{c}
 M \quad B \quad V \quad S \quad L \quad C \\
 M \left(\begin{array}{cccccc}
 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right) \\
 B \\
 V \\
 S \\
 L \\
 C
 \end{array}$$

- (N)** La matriz de adyacencia de un grafo no dirigido siempre es simétrica.

Actividades

- 1** Dada la siguiente matriz de adyacencia $M_G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, dibuja el grafo asociado.

Calcula M_G^t . ¿Qué ocurre?.

- 2** Dado el siguiente grafo dirigido, calcula su matriz de adyacencia:

