2 MATRICES II: DETERMINANTES.

En este segundo capítulo de matrices, aprenderemos a utilizar una herramienta muy importante como son los determinantes. Gracias a ellos, podremos calcular la inversa de una matriz dada, de una forma más sencilla.

2.1 Introducción. Propiedades.

Definición 2.1 (Determinante)

Definimos el determinante de una matriz cuadrada, como el número real $d \in \mathbb{R}$, que se obtiene al operar de una cierta manera los elementos de una matriz. Se representa mediante $det(A) = |A|$.

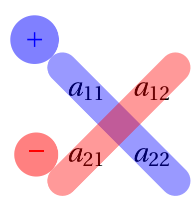
La operación que se realiza para la obtención del determinante es la siguiente:

2.1.1 Determinantes de orden dos.

Si tenemos una matriz A de orden dos dada por:

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

El determinante se obtiene mediante la siguiente regla de operaciones:



de donde obtenemos:

$$det(A) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1} \cdot a_{2,2} - a_{2,1} \cdot a_{1,2}.$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.1

Calcular el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución:

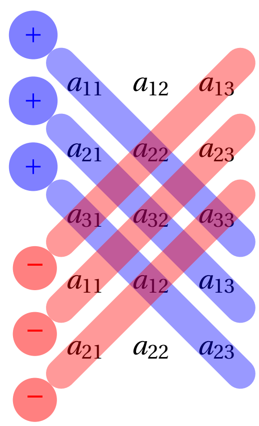
$$det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 4-3\cdot 2=4-6=-2.$$

2.1.2 Determinantes de orden tres.

Si tenemos una matriz A de orden tres dada por:

$$A_3=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

El determinante se obtiene mediante la siguiente regla de operaciones denominada “La regla de Sarrus”:



de donde obtenemos:

$$det(A)=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}=a_{1,1}\cdot a_{2,2}\cdot a_{3,3}+a_{2,1}\cdot a_{3,2}\cdot a_{1,3}+a_{3,1}\cdot a_{1,2}\cdot a_{2,3}-a_{3,1}\cdot a_{2,2}\cdot a_{1,1}-a_{1,3}\cdot a_{3,2}\cdot a_{2,3}-a_{2,1}\cdot a_{1,2}\cdot a_{3,3}.$$

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.2

Calcular el determinante de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Solución:

$$det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}=1\cdot4\cdot8+2\cdot5\cdot6+0\cdot3\cdot8-6\cdot4\cdot0-7\cdot5\cdot1-2\cdot3\cdot8=32+60+0-0-35-48=9.$$

Actividades

1. Prueba que $det(I)=1$, sea cual sea el orden de I.

2. Calcula el determinante de todas las matrices cuadradas expuestas en el tema anterior.

2.2 Propiedades de los determinantes.

Los determinantes, como comentamos al principio, es una herramienta muy útil con unas propiedades muy interesante, que nos permiten resolver determinados problemas, que veremos en geometría. Veamos cuales son estas propiedades.

Propiedades de los determinantes

- El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta: $|A|=|A^t|$.
- Si una matriz A tiene una fila o columna de ceros, entonces $det(A)=0$.
- Si en un determinante, intercambiamos dos filas o columnas, entonces el determinante cambia de signo.
- Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales o proporcionales, esto es, una se obtiene como la suma de las otras o producto de un escalar por una de ellas, entonces el determinante vale cero.
- Si todos los elementos de una fila o columna los multiplicamos por un mismo número entonces, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.
- El determinante del producto de dos matrices, es igual al producto de los determinantes: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

Veamos ejemplos de todas las propiedades.

Ejemplo 2.3

Dar una matriz que verifique $|A| = |A^t|$.

Solución: Cualquier matriz lo verifica, por ejemplo si tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, cuyo determinante es $|A| = -2$ y hacemos su traspuesta $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, se verifica que $|A^t| = -2$.

Ejemplo 2.4

Dar una matriz con una fila de ceros que verifique la segunda propiedad.

Solución: Cualquier matriz lo verifica, por ejemplo si tomamos $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, su determinante es $|A| = 1 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 0$.

Ejemplo 2.5

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, prueba que verifica la tercera propiedad.

Solución: El determinante de A es $|A| = 2$. Si intercambiamos las dos filas entonces $A' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$, su determinante es $|A| = 2 \cdot 3 - 8 \cdot 1 = -2$.

Ejemplo 2.6

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ prueba que verifican la cuarta propiedad.

Solución: En efecto, el determinante de A es $|A| = 3 - 3 = 0$ ya que tiene dos filas iguales. El determinante de B es $|B| = 2 \cdot 3 - 6 \cdot 1 = 0$, ya que la segunda fila es proporcional a la primera, es decir, $3 \cdot F_1 = F_2$.

Ejemplo 2.7

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ comprueba que si multiplicamos la primera fila por 5, se cumple la quinta propiedad.

Solución: El determinante de A es $|A| = -3$. Si multiplicamos la primera fila de A por 5 resulta esta matriz $A' = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ cuyo determinante es $|A'| = 15 - 30 = -15 = 5 \cdot (-3) = 5 \cdot |A|$.

Ejemplo 2.8

Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ prueba que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Solución: El determinante de $|A| = -2$ y $|B| = -10$, entonces $|A| \cdot |B| = 20$. Ahora, tenemos que hacer el producto de A y B y hacerle el determinante:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-2) & 2 \cdot (-5) + 0 \cdot 0 \\ 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-2) & 4 \cdot (-5) + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -10 \\ -2 & -20 \end{pmatrix}.$$

El determinante de $A \cdot B$ es $|A \cdot B| = -2 \cdot (-20) - (-2 \cdot (-10)) = 40 - 20 = 20$.

N Sobra decir que los ejemplos los hemos resuelto para matrices de orden dos, por la sencillez de los cálculos, pero se pueden verificar para cualquier otra matriz cuadrada.

Veamos la resolución de algún ejercicio tipo de selectividad.

Ejercicio resuelto. *(Selectividad 2003 - Modelo 4 - Andalucía).*
Sabiendo que $|A| = 5$, donde A es una matriz de orden 3. Calcula indicando las propiedades que utilices:

1. El determinante de $2A$.
2. El determinante de A^{-1}.

Solución:

1. Por la propiedad seis, sabemos que si a una matriz le multiplicamos una fila o columna por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número. En este caso, como el escalar 2 multiplica a toda la matriz, y la matriz es de orden 3, entonces multiplicara a la matriz una vez por cada fila o columna (depende como lo queramos ver), luego en este caso $|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot 5 = 40$.
2. Sabemos por la propiedad siete, que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Si consideramos $B = A^{-1}$ resulta que $A \cdot A^{-1} = I$, luego $|A \cdot A^{-1}| = |I|$. Como $|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |I| = 1$, entonces despejando, $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|} = \dfrac{1}{5}$.

2.3 Menor complementario y adjunto.

Definición 2.2 (Menor complementario)

Se llama menor complementario de un elemento de una matriz, al determinante que resulta de suprimir la fila y la columna a la que pertenece dicho elemento.

Supongamos que tenemos la siguiente matriz de orden 3:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Si queremos calcular el menor complementario de del elemento $a_{1,1}$, lo que hacemos es eliminar la fila y la columna en la que está resultando la siguiente submatriz:

$$\begin{pmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

a la cual le hacemos el determinante, que denominamos el menor complementario del elemento $a_{1,1}$:

Definición 2.3 (Adjunto)

Definimos el adjunto de un elemento, como el menor complementario con el signo correspondiente del elemento, dependiendo de los subindices que marcan la posición en la que están. Si la suma de los subindices es un número par, entonces el signo del adjunto es $+$ y si es impar $-$.

En el caso anterior, como la suma de los subindices del elemento $a_{1,1}$ es $1+1=2$ que es par, el adjunto del elemento $a_{1,1}$ es:

$$Adj_{a_{1,1}} = + \begin{vmatrix} a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}.$$

N No olvidemos que un determinante es un número, por lo que lo que obtenemos al final es un número o bien negativo o bien positivo.

De este modo, llegamos a una definición que nos será de gran importancia a la hora de calcular la matriz inversa por determinantes:

Definición 2.4 (Matriz adjunta)

Dada una matriz A. Definimos la matriz adjunta, como aquella cuyos elementos están formados por los adjuntos de A. La representamos por A^{adj}

Ejemplo 2.9

Calcular la matriz adjunta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Solución: La matriz adjunta tendrá la forma $A^{adj} = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{pmatrix}$, donde los $\alpha_{i,j}$ son los adjuntos.

Definimos los elementos de la matriz A, esto es, $a_{1,1} = 1, a_{1,2} = -1, a_{1,3} = 1, a_{2,1} = -1, a_{2,2} = 0, a_{2,3} = -1, a_{3,1} = 0, a_{3,2} = 1, a_{3,4} = 1$. Calculamos los adjuntos de cada elemento:

- Calculamos el signo: $a_{1,1}$, la suma de los subindices es $1+1=2$ que es par, luego le asignamos signo $+$. Ahora $Adj_{a_{1,1}} = +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = +(0\cdot(-1) - (1\cdot(-1))) = 1 = \alpha_{1,1}$.
- $a_{1,2}$, la suma de los subindices es $1+2=3$ que es impar, luego le asignamos signo $-$. Ahora $Adj_{a_{1,2}} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -(-1\cdot(-1) - (0\cdot(-1))) = -1 = \alpha_{1,2}$.
- $a_{1,3}$, la suma de los subindices es $1+3=4$ que es par, luego le asignamos signo $+$. Ahora $Adj_{a_{1,3}} = +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 = \alpha_{1,3}$.
- $a_{2,1}$, la suma de los subindices es $2+1=3$ que es impar, luego le asignamos signo $-$. Ahora $Adj_{a_{2,1}} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 = \alpha_{2,1}$.
- $a_{2,2}$, la suma de los subindices es $2+2=4$ que es par, luego le asignamos signo $+$. Ahora $Adj_{a_{2,2}} = +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 = \alpha_{2,2}$.
- $a_{2,3}$, la suma de los subindices es $2+3=5$ que es impar, luego le asignamos signo $-$. Ahora $Adj_{a_{2,3}} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 = \alpha_{2,3}$.
- $a_{3,1}$, la suma de los subindices es $3+1=4$ que es par, luego le asignamos signo $+$. Ahora $Adj_{a_{3,1}} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 = \alpha_{3,1}$.
- $a_{3,2}$, la suma de los subindices es $3+2=5$ que es impar, luego le asignamos signo $-$. Ahora $Adj_{a_{3,2}} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 = \alpha_{2,3}$.
- $a_{3,3}$, la suma de los subindices es $3+3=6$ que es par, luego le asignamos signo $+$. Ahora $Adj_{a_{3,3}} = +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 = \alpha_{3,3}$.

Luego finalmente, nuestra matriz adjunta es

$$A^{adj} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.3.1 Rango de una matriz.

El rango de una matriz es un dato que tenemos que tener en cuenta a la hora de resolver sistemas de ecuaciones matriciales (tema 3). Es muy sencillo de obtener. Su definición es la siguiente:

Definición 2.5 (Rango)

Definimos el rango de una matriz al orden del menor complementario no nulo que existe dentro de una matriz.

N ¿Las matrices de orden 3 tienen que tener necesariamente rango 3?. La respuesta es NO. Hay matrices de orden 3 cuyo menor no nulo más grande es de orden 2, ya que aquel menor de orden 3 (el propio determinante de la matriz) es nulo.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 2.10

Calcula el rango de la siguiente matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución: Vamos de mayor a menor complementario. Como la matriz es de orden 3, calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

por lo tanto el rango de la matriz no es 3. Ahora, si encontramos un menor no nulo de orden 2, entonces la matriz será de rango 2. En caso de que no lo encontremos, diremos que la matriz es de rango 1. Buscamos entonces combinaciones de dos columnas o filas, tomando solo menores de orden 2 para ver su rango. Por ejemplo tomamos las dos primeras columnas y filas, resultando el menor:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Como hay más menores de orden 2, no podemos decir que la matriz no es de rango 2. Veamos el menor formado por la 2º y 3º columnas y las dos primeras filas:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

En este caso, este menor es no nulo, luego la matriz es de rango 2.

N El rango más pequeño que puede tener una matriz es 1.

Actividades

1. Obtener el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Obtener el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. Obtener el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Calcula el valor de a, para que la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, tenga rango 3.

5. Determina los rangos que puede tomar la siguiente matriz $\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a-1 \end{pmatrix}$, dependiendo del parámetro a.

2.4 Calculo de la matriz inversa por determinantes.

En esta sección vamos a ver como podemos calcular la inversa de una matriz dada, siempre y cuando esta matriz tenga inversa, por los determinantes. Para ello nos hacen falta las propiedades y matrices definidas anteriormente.

Una condición que se debe cumplir para que una matriz tenga inversa, y que se comprueba a partir de los determinantes es la siguiente.

Teorema 2.1

Una matriz A tiene inversa si y solo si $det(A) \neq 0$.

Si una matriz cumple esta propiedad, entonces podemos asegurar que tiene inversa.

A continuación presentamos el algoritmo que se lleva a cabo para dicho proceso.

Calculo de inversa por determinantes

Dada A una matriz cuadrada, para obtener A^{-1} por determinantes tenemos que realizar el siguiente algoritmo.

1. Comprobamos que $det(A) \neq 0$. Si $\det(A) = 0$ entonces aseguramos que A no tiene inversa.
2. Calculamos la matriz traspuesta de A (A^t).
3. Calculamos la matriz adjunta de la matriz A^t, que denominamos por matriz traspuesta adjunta (A^t_{adj}).
4. Dividimos la matriz A^t_{adj} por el determinante de A, obtenido en el primer paso.

Finalmente, la matriz inversa de A, si la tiene, se obtiene por $A^{-1} = \dfrac{A^t_{adj}}{|A|}$.

Veamos un ejemplo para asimilar bien el algoritmo.

Ejemplo 2.11

Consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular la inversa por determinantes.

Solución:

1. Primero vemos que $|A| = 1 \neq 0$, por lo tanto A tiene inversa.
2. La matriz traspuesta de A es $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Calculamos los adjuntos de A^t, obteniendo la siguiente matriz adjunta

$$A^t_{adj} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

4. Finalmente, calculamos la inversa mediante:

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Actividades

1. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa, si es posible, por determinantes.

2. Probar que $(A^{adj})^t = A^t_{adj}$.

3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa, si es posible, por determinantes. Si no se puede calcular, indica que propiedades se pueden utilizar de los determinantes, para que no se cumpla la condición de no existencia de inversa.

4. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -3 & -4 & 5 \\ 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa, si es posible, por determinantes.

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 5 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Calcula su inversa, si es posible, por determinantes.

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 9 & -2 & 27 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$. Calcula su inversa, si es posible, por determinantes.

2.5 Ejercicios propuestos.

Problemas propuestos

1. *(Selectividad 2003 - Modelo 4 - Andalucia). Sean $C_1, C{-}2$ y C_3 las columnas primera, segunda y tercera de una matriz cuadrada A de orden 3, cuyo determinante vale 5. Calcula, indicando las propiedades que utilices:*

   a) *El determinante de A^3.*

   b) *El determinante de A^{-1}. (Resuelto en el ejemplo).*

   c) *El determinante de $2A$. (Resuelto en el ejemplo).*

   d) *El determinante de una matriz cuadrada cuyas columnas primera, segunda y tercera son respectivamente, $3C_1 - C_3, 2C_3$ y C_2.*

2. (Selectividad 2004 - Modelo 1 - Andalucia). Sabiendo que $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6$. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

   a) $\begin{vmatrix} -3x & -y & -z \\ 3t & u & v \\ 3a & b & c \end{vmatrix}$.

   b) $\begin{vmatrix} -2y & x & z \\ -2u & t & v \\ -2b & a & c \end{vmatrix}$.

   c) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$.

3. *(Selectividad 2004 - Modelo 4 - Andalucia). Denotamos por M^t la matriz traspuesta de una matriz M.*

   a) *Sabiendo que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, y que $det(A) = 4$, calcula los siguientes determinantes:*

   $$det(-3A^t) \qquad \begin{vmatrix} 2b & 2a \\ -3d & -3c \end{vmatrix}.$$

   b) *Sea I_3 la matriz identidad de orden 3 y B una matriz cuadrada tal que $B^3 = I_3$. Calcula $det(B)$.*

   c) *Sea C una matriz cuadrada tal que $C^{-1} = C^t$. ¿Puede ser $det(C) = 3$?. Razona la respuesta.*

4 (Selectividad 2004 - Modelo 5 - Andalucia). Sabiendo que $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

5 *(Selectividad 2004 - Modelo 5 - Andalucia). Sabiendo que* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2$. *Calcula, indicando las propiedades que utilices:*

a) $\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 15a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}$.

b) $\begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}-a_{31} & a_{22}-a_{32} & a_{23}-a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$.

6 (Selectividad 2004 - Modelo 6 - Andalucia). Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

.

a) Calcula $A \cdot B$, $A \cdot C$, $A^t \cdot B^t$ y $C^t \cdot A^t$, siendo A^t, B^t y C^t las matrices traspuestas de A, B y C respectivamente.

b) Razona cuáles de las matrices A, B, C y $A \cdot B$ tienen matriz inversa y en los casos en la que respuesta sea afirmativa, halla la correspondiente matriz inversa.

7 *(Selectividad 2005 - Modelo 4 - Andalucia). Sea I_2 la matriz identidad de orden 2 y* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) *Halla los valores de x, para los que la matriz $A - xI$ no tiene inversa.*

b) *Halla los valores a y b para los que $A^2 + aA + bI = O$, donde O es la matriz nula de orden 2.*

8 (Selectividad 2005 - Modelo 6 - Andalucia). Sabiendo que $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 2$. Calcula, indicando las propiedades que utilices:

a) $|-3A|$ y $|A^{-1}|$.

b) $\begin{vmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ 2i & 2h & 2g \end{vmatrix}$.

c) $\begin{vmatrix} a & b & a-c \\ d & e & d-f \\ g & h & g-i \end{vmatrix}$.

9 *(Selectividad 2006 - Modelo 3 - Andalucia). Considera* $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$*, siendo a un número real.*

a) *Calcula el valor de a para que* $A^2 - A = \begin{pmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$

b) *Calcula en función de a, los determinantes de $2A$ y A^t, siendo A^t la traspuesta de A.*

c) *¿Existe algún valor de a para que la matriz A sea simétrica?. Razona la respuesta.*

10 (Selectividad 2006 - Modelo 4 - Andalucia). Sean I_2 la matriz identidad de orden dos y $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$.

a) Determina la matriz $B = A^2 - 2A$.

b) Determina los valores de λ para los que la matriz B tiene inversa.

c) Calcula B^{-1} para $\lambda = 1$.

11 *(Selectividad 2007 - Modelo 6 - Andalucia). Sean I_3 la matriz identidad de orden tres y* $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) *Determina los valores de λ para los que el determinante de $A-2I$ es cero.*

b) *Calcula la matriz inversa de $A-2I$ para $\lambda=-2$.*