3 MATRICES III: ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES.

En este último tema del bloque de matrices, vamos a aprender a resolver ecuaciones matriciales y sistemas de ecuaciones por los métodos de resolución conocidos: Matricial, Cramer ó Gauss. Veremos como se clasifican los sistemas, dependiendo del número de soluciones que presentan, por el conocido teorema de Rouché Frobenius. Finalmente, veremos la aplicación de estas herramientas a la resolución de problemas.

3.1 Ecuaciones matriciales.

Al igual que una ecuación lineal como las que resolvemos habitualmente con valores reales, existen las ecuación matriciales. Su resolución consiste en despejar la variable o incógnita que no conocemos.

Si consideramos la ecuación matricial $A \cdot X = B$, donde A y B son matrices conocidas y en este caso X es la matriz incógnita. Su resolución consiste, como solemos hacer, con despejar X. Como bien sabemos, las matrices no se pueden dividir, por lo que para despejar A, solo podemos realizar las operaciones que conocemos, en este caso la apropiada es el producto. Si multiplicamos en ambos lados de la igualdad por A^{-1} resulta $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Como $A \cdot A^{-1} = I$, entonces obtenemos que $I \cdot X = A^{-1} \cdot B$ de donde finalmente $X = A^{-1} \cdot B$.

Una vez realizado la resolución matricial de forma esquemática, debemos realizar el procedimiento analítico, operando con las matrices involucradas para obtener la matriz incógnita X.

Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.1

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación matricial $AX + B = C$.

Solución: Primero resolvemos la ecuación matricial esquemáticamente, para saber las operaciones que debemos de realizar y las matrices que debemos de obtener:

$$AX + B = C$$

$$AX = C - B$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}(C - B)$$

$$X = A^{-1}(C - B).$$

Luego debemos de calcular la matriz A^{-1} y la matriz $C - B$.

- Calculamos A^{-1} por determinantes: El determinante de A es $|A| = 1 \cdot 0 - (1 \cdot (-1)) = 1 \neq 0$. La matriz traspuesta es $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. La matriz traspuesta adjunta es $A^t_{adj} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
  Finalmente la matriz inversa es $A^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
- Obtenemos la matriz $C - B$: $C - B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-0 & 0-(-1) \\ -1-2 & 1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Finalmente obtenemos X operando las matrices obtenidas:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (1) & 0 \cdot 1 + 1 \cdot (3) \\ -1 \cdot (-1) + 1 \cdot (1) & -1 \cdot 1 + 1 \cdot (3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

N Si queremos comprobar que hemos realizado bien la operación, basta con sustituir las matrices en la ecuación inicial y ver que se verifica la igualdad.

Comprobemos que hemos realizado bien las operaciones. Para ello comprobamos que se cumple $AX + B = C$:

$$AX + B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = C$$

Actividades

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación matricial $XA = B$.

2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación matricial $AX + B = C$.

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación matricial $AXA = B$.

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Resuelve las siguientes ecuaciones matriciales:

   a) $3AX = B$.
   b) $3AX = B^t$.
   c) $AXA = B$.
   d) $XB = 2A$.

5. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$. Resuelve la ecuación matricial $(AB^t + C)X = D$.

3.2 Sistemas de ecuaciones matriciales.

En cursos anteriores, aprendimos a resolver sistemas de ecuaciones, lineales y no lineales. En esta sección vamos a trabajar con sistemas lineales y veremos como podemos trabajar matricialmente con ellos.

Consideramos un sistema de m ecuaciones con n incógnitas, expresado de la forma habitual que conocemos:

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right. ,$$

donde $a_{i,j} \in \mathbb{R}$ son los coeficientes, x_j las incógnitas y $b_i \in \mathbb{R}$ los términos independientes, con $1 \le i \le m$ y $1 \le j \le n$.

Entonces podemos expresar el sistema de forma matricial como sigue:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

o bien, $AX = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X la matriz de incógnitas y B la matriz de términos independientes.

Dependiendo de las soluciones que presenta un sistema, le daremos una serie de nombres:

Definición 3.1

Dado un sistema matricial de la forma $AX = B$:

- Diremos que el sistema es compatible determinado, si tiene una única solución.
- Diremos que el sistema es compatible indeterminado, si tiene infinitas soluciones.
- Diremos que el sistema es incompatible, si no tiene solución.

A continuación, vamos a explicar los procedimientos de resolución de sistemas de ecuaciones matriciales, suponiendo que tiene una única solución, que el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas y que el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo. Estas condiciones serán necesarias para obtener una única solución del sistema, y las veremos más detenidamente a la hora de clasificar los sistemas de ecuaciones matriciales.

3.2.1 Método matricial.

El método matricial consiste en resolver una ecuación matricial al igual que hicimos en la primera sección. Dado el sistema, deberemos escribirlo de forma matricial y posteriormente, realizar el calculo de la solución como procedimos en la resolución de ecuaciones matriciales. Veamos un ejemplo:

Ejemplo 3.2

Resolver el siguiente sistema por el método matricial.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \\ 5x - 4y + z = 7 \end{cases}$$

Solución: Primeros lo escribimos de forma matricial, esto es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

El sistema entonces se escribe como $AX = B$. Resolvemos la ecuación obtenida:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \Longrightarrow X = A^{-1}B.$$

Debemos de calcular pues, A^{-1}:

1. Primero vemos que el determinante de A es no nulo:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 60 - 12 - (10 + 32 - 9) = 73 - 54 = 19 \neq 0,$$

   luego A tiene inversa.

2. La matriz traspuesta de A es

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & -4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. La traspuesta adjunta de A es:

$$A^t_{adj} = \begin{pmatrix} -14 & -1 & 10 \\ -23 & -3 & 11 \\ -22 & -7 & 13 \end{pmatrix}.$$

4. Finalmente

$$A^{-1} = \frac{A^t_{adj}}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -14 & -1 & 10 \\ -23 & -3 & 11 \\ -22 & -7 & 13 \end{pmatrix}}{19} = \begin{pmatrix} \frac{-14}{19} & \frac{-1}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{-23}{19} & \frac{-3}{19} & \frac{11}{19} \\ \frac{-22}{19} & \frac{-7}{19} & \frac{13}{19} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, obtenemos que la solución del sistema es:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{-14}{19} & \frac{-1}{19} & \frac{10}{19} \\ \frac{-23}{19} & \frac{-3}{19} & \frac{11}{19} \\ \frac{-22}{19} & \frac{-7}{19} & \frac{13}{19} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

luego $x = 1, y = 0, z = 2$.

3.2.2 Método de Cramer.

Este método es sin duda el más empleado por los alumnos, debido a su facilidad a la hora de calcular la solución. Cada incógnita se obtiene igualándola al cociente entre el determinante que resulta de sustituir en la matriz de coeficientes la columna de la incógnita por la matriz de términos independientes y el determinante de la matriz de coeficientes.

Supongamos que tenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

o equivalentemente $AX = B$.Entonces para obtener el valor de la incógnita x_1 lo que hacemos es sustituir en la matriz A la columna primera, que es la correspondiente a la variable x_1, por la matriz de términos independientes, obteniendo:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}}{|A|}.$$

Para obtener el de x_2, procedemos así:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} \end{vmatrix}}{|A|}.$$

Finalmente, el valor de la incógnita x_3 se obtiene así:

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}}{|A|},$$

quedando totalmente determinada la solución del sistema.

Veamos la resolución del sistema del ejemplo anterior pero con el método de Cramer donde obviamente, debemos obtener la misma solución.

Ejemplo 3.3

Resolver el siguiente sistema por el método de Cramer.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 4 \\ 3x + 2y - 4z = -5 \\ 5x - 4y + z = 7 \end{cases}$$

Solución: Primeros lo escribimos de forma matricial, esto es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

o equivalentemente $AX = B$.Calculamos el determinante de A, que por el ejemplo anterior, sabemos que $|A| = 19$.

Ahora, calculamos cada variable tal y como hemos explicado anteriormente:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & -4 \\ 7 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{19} = \frac{8+84+20-(14+64+15)}{19} = \frac{19}{19} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & -4 \\ 5 & 7 & 1 \end{vmatrix}}{19} = \frac{-10-80+21-(-25-56+12)}{19} = \frac{0}{19} = 0,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -5 \\ 5 & -4 & 7 \end{vmatrix}}{19} = \frac{28+75-48-(40+40-63)}{19} = \frac{38}{19} = 2,$$

luego hemos obtenido $x = 1, y = 0, z = 2$, que es la misma solución que obtuvimos en el ejemplo anterior.

3.2.3 Método de Gauss.

El método de Gauss está basado en el calculo de la inversa de una matriz, con la diferencia de que antes, la matriz de la derecha era la matriz identidad, y ahora será la matriz de términos independientes (B), obteniendo la siguiente expresión matricial $(A|B)$.

Además, cuando realizábamos el cálculo de la inversa, la idea era realizar transformaciones gaussianas hasta obtener la matriz identidad en el lado izquierdo, ahora lo que debemos de construir es una matriz que definimos a continuación.

Definición 3.2 (Matriz triangular superior)

Definimos una matriz triangular superior, como aquella matriz en la que los términos inferiores a la diagonal principal son ceros, es decir:

$$T_s = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Un ejemplo de matriz triangular superior es el siguiente:

$$T_{s3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

N En el caso de que los ceros estuviesen por encima de la diagonal principal, se denotaría matriz triangular inferior.

La idea entonces, a la hora de resolver un sistema por el método de Gauss será hacer ceros, para obtener una matriz triangular superior, de modo que el último elemento que obtengamos nos dé ya la primera solución del sistema, que posteriormente, iremos sustituyendo de abajo hacia arriba, para obtener las demás soluciones.

Como siempre, veamos un ejemplo de resolución. De nuevo, resolvemos el ejemplo que vimos en los apartados anteriores para comprobar que obtenemos la misma solución.

Ejemplo 3.4

Resolver el siguiente sistema por el método de Gauss.

$$\begin{cases} 2x-3y+z=4 \\ 3x+2y-4z=-5 \\ 5x-4y+z=7 \end{cases}$$

Solución: Primeros lo escribimos de forma matricial, esto es:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

o equivalentemente $AX = B$. Representamos las matrices A y B en la expresión gaussiana:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -4 & -5 \\ 5 & -4 & 1 & 7 \end{array}\right).$$

Realizamos operaciones gaussianas para obtener una matriz triangular superior. Hacemos cero por debajo del primer elemento de la primera matriz (a esta acción se le denomina pivotar). Luego para ello, debemos realizar las siguientes dos operaciones:

- $F_2' = 2F_2 - 3F_1$.
- $F_3' = 2F_3 - 5F_1$.

Luego obtenemos la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 13 & -11 & -22 \\ 0 & 7 & -3 & -4 \end{array}\right).$$

Ahora, queremos hacer un cero por debajo del primer elemento no nulo de la segunda fila (13), por lo tanto la primera fila la dejamos fija y operamos la segunda y tercera, realizando $F_3' = 13F_3 - 7F_2$, de donde:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 13 & -11 & -22 \\ 0 & 0 & 38 & 76 \end{array}\right).$$

Una vez llegado aqui, debemos de volver a escribir las ecuaciones de nuestro sistema:

$$\begin{cases} 2x-3y+z=4 \\ 13y-11z=-22 \\ 38z=76 \end{cases}$$

Podemos observar que de la última ecuación ya tenemos determinado el valor de la variable z, de donde $z=\frac{76}{38}=2$. De forma escalonada, sustituimos el valor obtenido en la segunda ecuación (de ahí que comentamos que iríamos hacia arriba), obteniendo:

$$13y-11\cdot 2=-22,$$

de donde $y=0$.
Finalmente, sustituimos los valores de z e y en la primera ecuación resultando:

$$2x-3\cdot 0+2=4,$$

de donde $x=1$.

Luego hemos obtenido $x=1, y=0, z=2$, que es la misma solución que obtuvimos en el ejemplo anterior.

Actividades

1. Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5x-6y=1 \\ 8x+9y=7 \end{cases}$$

Resolverlo utilizando:

a) Método de sustitución. (Repaso)
b) Método de igualación. (Repaso)
c) Método de reducción. (Repaso)
d) Método matricial.
e) Método de Cramer.
f) Método de Gauss.

2. Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+y-3z=-5 \\ 3x-y+2z=7 \\ x+y+z=6 \end{cases}$$

Resolverlo utilizando:

a) Método matricial.
b) Método de Cramer.
c) Método de Gauss.

3. Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 3x+2y-4z=2 \\ x-y+5z=8 \end{cases}$$

Resolverlo utilizando:

a) Método matricial.
b) Método de Cramer.
c) Método de Gauss.

4. Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x-5y+z=-3 \\ x+3y-4z=5 \\ 3x-y+2z=4 \end{cases}$$

Resolverlo utilizando:

a) Método matricial.
b) Método de Cramer.
c) Método de Gauss.

5. Dado el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-y-z=6 \\ -x\ \ +3z=2 \\ -2x+5y-3z=0 \end{cases}$$

Resolverlo utilizando:

a) Método matricial.
b) Método de Cramer.
c) Método de Gauss.

3.2.4 Clasificación de sistemas de ecuaciones matriciales. Criterio de Rouché Frobenius.

En este último apartado sobre matrices, vamos a aprender a clasificar los sistemas de ecuaciones según el número de soluciones que presenten y a resolver aquellos sistemas cuyo número de incóngnitas es distinto al número de ecuaciones. Para ello comenzamos definiendo un término importante, que ya hemos utilizado en el método de Gauss.

Definición 3.3 (Matriz ampliada)

Dado un sistema de ecuaciones de la forma $AX = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X la matriz de variables y B la matriz de términos independientes. Entonces definimos la matriz ampliada como aquella matriz formada por la matriz de coeficientes y la matriz de términos independientes, esto es:

$$M^* = (A|B)$$

Cuando tengamos la expresión matricial de un sistema, bastará sólo con conocer el rango de la matriz de coeficientes y el rango de la matriz ampliada, para saber cuántas soluciones tiene el sistema. De aquí nace el conocido y útil teorema de Rouché Frobenius.

Teorema 3.1 (Rouché Frobenius)

Dado un sistema de ecuaciones de la forma $AX = B$, donde A es la matriz de coeficientes, X la matriz de variables y B la matriz de términos independientes. Consideremos $A^* = (A|B)$ la matriz ampliada. Entonces:

- Si el $Rango(A) = Rango(A^*) =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema tiene una única solución y se denomina Sistema Compatible Determinado (SCD).
- Si el $Rango(A) = Rango(A^*) <$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ el sistema tiene infinitas soluciones y se denomina Sistema Compatible Indeterminado (SCI).
- Si el $Rango(A) \neq Rango(A^*)$ $\Longrightarrow$ el sistema no tiene solución y se denomina Sistema Incompatible (SI).

Este teorema nos proporciona las condiciones necesarias y suficientes para garantizar la existencia de solución en los sistemas, de modo que podemos resolverlos cuando sean sistemas compatibles. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 3.5

Clasificar y resolver si es posible el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = -2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

Solución: Primeros lo escribimos de forma matricial, esto es:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

o equivalentemente $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Como la matriz A no es cuadrada, a lo sumo podrá tener como rango el número de columnas, en este caso 2. Para ello por ejemplo, tomamos el menor principal de orden dos que obtenemos tomando las dos primeras filas:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - (-2) = 11 \neq 0,$$

luego efectivamente, A tiene rango 2. Por otro lado definimos la matriz ampliada

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array}\right),$$

aunque por comodidad, y por que realmente no estaría bien expresada la matriz, debemos representarla así:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz A^* es cuadrada de orden 3, a lo sumo tendrá rango 3, veamos si es así:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 8 - 5 - (30 + 6 - 6) = 35 - 35 = 0.$$

Por lo tanto A^* no tiene rango 3. Veamos si tiene rango 2. Para ello, tomamos por ejemplo el menor formado por las dos primeras filas y las dos últimas columnas:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 15 = -11 \neq 0,$$

luego A^* tiene rango 2, por lo tanto el Teorema de Rouché Frobenius nos garantiza que como $Rango(A) = Rango(A^*) =$ nº de incóngitas $= 2$, entonces el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

De este modo, al tener la matriz A tres filas, podemos eliminar una de ellas (la que queramos), ya que significa que una de ellas es combinación lineal de las demás, en efecto, $F_3 = F_1 - F_2$.

Eliminamos por tanto la última fila resultando el siguiente sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

El cual vamos a resolver por el método de Cramer (por ser el más sencillo y utilizado):

$$x = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} = \frac{11}{11} = 1,$$

$$y = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}} = \frac{-11}{11} = -1,$$

luego la solución de nuestro sistema es $x = 1, y = -1$.

Gracias al Teorema de Rouché Frobenius, podemos determinar, dado un parámetro, para que valores de ese parámetro, un sistema puede ser compatible o incompatible. Veamos un ejercicio de selectividad resuelto.

Ejercicio resuelto. *(Selectividad 2009 - Examen oficial Junio (Opción B) - Andalucía).*
Sea el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ 2x - \lambda y + z = 2 \\ x - y + \lambda z = \lambda \end{cases}$$

1. Discútelo según los valores del parámetro λ. ¿Tiene siempre solución?.
2. Resuelve el sistema para $\lambda = -1$.

Solución:

1. Escribimos la matriz de coeficientes y la matriz ampliada:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \lambda+2 \\ 2 & -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & -1 & \lambda & \lambda \end{pmatrix}.$$

Calculamos ahora el determinante de la matriz A, del cual obtendremos los valores que toma λ, cuando lo igualemos a cero, ya que lo que buscamos es que $|A| = 0$ para que $Rango(A) \neq 3 =$ rango máximo:

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 - 2 - (-\lambda - \lambda + 2\lambda) = -\lambda^3 - 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -1.$$

Luego ese valor nos va a permitir clasificar el sistema del siguiente modo:

- Si $\lambda = -1$, entonces $Rango(A) \neq 3$, veamos que rango tiene entonces A y su matriz ampliada para poder clasificar el sistema. Escribimos A y A^* con $\lambda = -1$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tomamos por ejemplo el menor principal formado por las dos primeras filas y columnas.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0,$$

luego $Rango(A) = 2$. Como podemos tomar las mismas filas y columnas de A^*, deducimos que $Rango(A^*) = 2$. Por lo tanto por Roché Frobenius, $Rango(A) = Rango(A^*) = 2 <$ nº de incógnitas $= 3$ entonces el sistema es compatible indeterminado (SCI), es decir, tiene infinitas soluciones. (Su resolución nos la piden en el apartado 2).

- Si $\lambda \neq -1$, entonces $Rango(A) = 3$. Además, tenemos que $Rango(A^*) = 3$, por lo tanto por Rouché Frobenius, $Rango(A) = Rango(A^*) =$ nº de incógnitas $= 3$, entonces el sistema es compatible determinado (SCD), es decir, tiene una única solución.

2. Tenemos que resolver el sistema para $\lambda = -1$. Como hemos visto en su clasificación, el sistema va a tener infinitas soluciones. Esto quiere decir que dependiendo de los valores de un cierto parámetro que ahora definiremos, el sistema va a darnos una u otra solución. Por lo tanto, como $Rango(A) = 2$, podemos eliminar una fila (la que queramos) y tomar una de las variables como un parámetro. Eliminamos por ejemplo la tercera fila y tomamos $z = \alpha$, por lo tanto nuestro sistema resulta:

$$\begin{cases} -x + y + \beta = 1 \\ 2x + y + \beta = 2 \end{cases}$$

Como $\beta \in \mathbb{R}$ es un escalar, podemos pasarlo al segundo miembro, formando parte de la matriz de términos independientes, obteniendo el siguiente sistema matricial:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\beta \\ 2-\beta \end{pmatrix}.$$

Llegados a este punto, resolvemos el sistema por el método que queramos (yo lo resuelvo por Cramer). La solución nos queda en función del parámetro β.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-\beta & 1 \\ 2-\beta & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1-\beta-(2-\beta)}{-1-2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1-\beta \\ 2 & 2-\beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2+\beta-2(1-\beta)}{-1-2} = \frac{-4+3\beta}{-3}.$$

Luego el conjunto infinito de soluciones viene dada por $x = \frac{1}{3}, y = \frac{-4+3\beta}{-3}, z = \beta$.

Como podemos comprobar, para $\beta = 0$, una solución del sistema es $x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}, z = 0$. Si vamos dándole valores al parámetro, obtenemos distintas soluciones. (La comprobación de que el sistema se satisface con distintas soluciones de la forma expresada anteriormente no es necesaria, pero la dejamos para el lector para que afiance los conceptos).

Actividades

1. Clasifica y resuelve el siguiente sistema si se puede

$$\begin{cases} x+y+2z=7 \\ 3x-y+4t=1 \\ x-3y-4z+4t=6 \end{cases}$$

2. Clasifica y resuelve el siguiente sistema si se puede

$$\begin{cases} x+y+2z=7 \\ 3x-y+4t=1 \end{cases}$$

3. Clasifica y resuelve el siguiente sistema si se puede

$$\begin{cases} 3x+y+-z=0 \\ x+y+z=0 \\ y-z=1 \end{cases}$$

4. Clasifica y resuelve el siguiente sistema si se puede

$$\begin{cases} x-2y+z=-2 \\ -2x+y+z=-2 \\ x+y-2z=-2 \end{cases}$$

5. Clasifica y resuelve el siguiente sistema si se puede

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ -x-y=1 \\ -y-z=-1 \end{cases}$$

6. Clasifica y resuelve el siguiente sistema si se puede

$$\begin{cases} x+y=5 \\ x+z=6 \\ y+z=7 \end{cases}$$

7. Clasifica y resuelve el siguiente sistema si se puede dependiendo del parámetro λ.

$$\begin{cases} \lambda x+y+z=4 \\ x+y+z=\lambda \\ x-y+\lambda z=2 \end{cases}$$

Para finalizar el capítulo, vamos a resolver un problema de desarrollo con matrices de selectividad.

Ejercicio resuelto. *(Selectividad 2003 - Modelo 6 (Opción B) - Andalucía).*
Una empresa cinematográfica dispone de tres salas A, B y C. Los precios de entrada a estas salas son de $3, 4$ y 5 euros, respectivamente. Un día, la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue 200. Si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Calcula el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

Solución:

Lo primero que tenemos que hacer es plantear el desarrollo del problema. Normalmente este tipo de problemas va a consistir en construir un sistema de ecuaciones con los datos que conocemos.

En primer lugar, definimos las variables:

$$x = \text{nº de espectadores que van a la sala } A.$$

$$y = \text{nº de espectadores que van a la sala } B.$$

$$z = \text{nº de espectadores que van a la sala } C.$$

Ahora, como sabemos que cada sala tiene su precio, entonces, si multiplico el número de espectadores por el precio de la sala, obtengo la recaudación de la sala. Además, si repito el proceso con las otras salas y lo sumo todo, obtengo la recaudación total. Luego nuestra primera ecuación sería:

$$3x + 4y + 5z = 720.$$

Ya que el precio de la sala A es 3€, de la sala B es 4€, y de la sala C es 5€, luego la suma de recaudación total es 720€.

Además, nos dicen que si intercambiamos los espectadores que van a la sala A por los de la sala B y viceversa, es lo mismo que decir, que aquellos que han pagado el precio de la sala B van a la sala A y viceversa, lo cual nos permite saber, que aquellos que van a la sala A van a pagar ahora el precio de B que es 4€, y los de A van a B pagando el precio de A que es 4€, obteniendo una recaudación de 20€ más, que sería $720 + 20 = 740$€, por lo tanto de esta condición obtenemos la segunda ecuación:

$$4x + 3y + 5z = 740.$$

Finalmente, la última ecuación la obtenemos de que el número total de espectadores es 200, es decir, los que van a la sala A mas los que van a B mas los que van a C:

$$x + y + z = 200.$$

Luego el sistema quedaría:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 4y + 5z = 720 \\ 4x + 3y + 5z = 740 \\ x + y + z = 200 \end{array} \right. ,$$

que expresado en forma matricial resulta:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 720 \\ 740 \\ 200 \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente $AX = B$. Podemos ver ahora que el sistema es compatible determinado, ya que $|A| = 9+20+20-(15+15+16) = 49-46 = 3$, luego $Rango(A) = Rango(A^*) =$ nº de incógnitas $= 3$, el sistema tiene una única solución. Resolviendo por Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 720 & 4 & 5 \\ 740 & 3 & 5 \\ 200 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = 100,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 720 & 5 \\ 4 & 740 & 5 \\ 1 & 200 & 1 \end{vmatrix}}{3} = 80,$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 720 \\ 4 & 3 & 740 \\ 1 & 1 & 200 \end{vmatrix}}{3} = 20.$$

Luego el número de espectadores que van a la sala A, B y C son respectivamente $100, 80$ y 20.

3.2.5 Ejercicios propuestos.

Problemas propuestos

1. *(Selectividad 2002 - Modelo 1 (Opción A)- Andalucia).*

   En el sector de las aceitunas sin hueso, tres empresas A, B y C se encuentran en competencia. Calcula el precio por unidad dado por cada empresa sabiendo que verifican las siguientes relaciones:

   - *El precio de la empresa A es $0'6$€ menos que la media de los precios establecido por B y C.*
   - *El precio dado por B es la media de los precios de A y C.*
   - *El precio de la empresa C es igual a 2€ mas $\frac{2}{5}$ del precio dado por A mas $\frac{1}{3}$ del precio dado por B.*

2. (Selectividad 2002 - Modelo 1 (Opción B)- Andalucia).

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula la matriz inversa de A.

b) Calcula A^{127} y A^{128}.

c) Determina x e y tal que $AB = BA$.

3. *(Selectividad 2002 - Modelo 2 (Opción A)- Andalucia).*

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1-\alpha & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \alpha-1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Determina α, si es posible, para que los sistemas de ecuaciones (dados en forma matricial)

$$AX = b, \qquad BX = c$$

tengan infinitas soluciones (cada uno de ellos).

4. (Selectividad 2002 - Modelo 2 (Opción B)- Andalucia).

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ a & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Halla los valores de a para los que la matriz $3A$ tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, la inversa de la matriz A^2 para $a = 0$.

5 *(Selectividad 2002 - Modelo 3 (Opción A)- Andalucia).*

Considera la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & t & 0 \\ t & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcula los valores de t para los que el determinante de A es positivo y halla el mayor valor que alcanza dicho determinante.

6 (Selectividad 2002 - Modelo 3 (Opción B)- Andalucia).

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + 3y + z = 3 \\ 2x + my + z = m \\ 3x + 5y + mz = 5 \end{cases}$$

a) Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga una y sólo una solución.

b) Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema tenga al menos dos soluciones.

c) Determina, si es posible, un valor de m para que el correspondiente sistema no tenga solución.

7 *(Selectividad 2002 - Modelo 4 (Opción A)- Andalucia).*

Determina una matriz A simétrica (A coincide con su traspuesta) sabiendo que

$$det(A) = -7 \ \ y \ \ A \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

8 (Selectividad 2002 - Modelo 4 (Opción B)- Andalucia).

Determina la matriz X que verifica la ecuación $AX = X - B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{y} \ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

9 *(Selectividad 2002 - Modelo 5 (Opción A)- Andalucia).*

Considera

$$A = \begin{pmatrix} m & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -m \\ 3 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ y \ C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a*) ¿Para qué valores de m tiene inversa la matriz A?.*

b*) Resuelve, para $m = 2$, el sistema de ecuaciones $AX = C$.*

10 (Selectividad 2002 - Modelo 5 (Opción B)- Andalucia).

Denotamos por M^t a la matriz traspuesta de una matriz M. Considera

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \ \text{y} \ C = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -2 & 9 & -6 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

a) Calcula $(AB)^t$ y $(BA)^t$.

b) Determina una matriz X que verifique la relación $\frac{1}{2}X + (AB)^t = C$.

11 *(Selectividad 2002 - Modelo 6 (Opción A)- Andalucia).*

Considera el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x - my + z = 1 \\ x + y + z = m + 2 \\ x + y + mz = 4 \end{cases}$$

a*) Clasifícalo según los valores del parámetro m.*

b*) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.*

12 (Selectividad 2002 - Modelo 6 (Opción B) - Andalucia).

Sin desarrollarlo, calcula el valor del determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} k & x & 1+ax \\ 2k & y & 2+ay \\ 3k & z & 3+az \end{pmatrix}$$

y enuncia las propiedades que hayas usado. $(a, k \in \mathbb{R})$.

13 *(Selectividad 2003 - Modelo 1 (Opción A)- Andalucia).*

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ y \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a*)* *¿Para qué valores de m tiene solución la ecuación matricial $AX + 2B = 3C$.?*

b*)* *Resuelve la ecuación matricial dada para $m = 1$.*

14 (Selectividad 2003 - Modelo 1 (Opción B)- Andalucia).

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Siendo I la matriz identidad de orden 3, calcula los valores de λ para los que la matriz $A + \lambda I$ no tiene inversa.

b) Resuelve el sistema $AX = 3X$.

15 *(Selectividad 2003 - Modelo 2 (Opción A)- Andalucia).*

Determina razonadamente los valores de m para los que el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x + y + z = mx \\ x + 2y + z = my \\ x + 2y + 4z = mz \end{cases}$$

tiene más de una solución.

16 (Selectividad 2003 - Modelo 2 (Opción B)- Andalucia).

a) Se sabe que el determinante de una matriz cuadrada A de orden 3 vale -2. ¿Cuánto vale el determinante de la matriz $4A$?.

b) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, ¿para qué valores de λ la matriz $3B + B^2$ no tiene inversa?.

17 *(Selectividad 2003 - Modelo 3 (Opción A)- Andalucia).*

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \ y \ B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 \end{pmatrix},$$

halla la matriz X que cumple que $AX = (BA^t)^t$.

18 (Selectividad 2003 - Modelo 3 (Opción A)- Andalucia).

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m^2 & 1 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Determina los valores de m para los que la matriz A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $m = 2$.

19 *(Selectividad 2004 - Modelo 2 (Opción A)- Andalucia).*

a) *Sabiendo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & a-1 & a \end{pmatrix}$ tiene rango 2, ¿cuál es el valor de a?.*

b) *Resuelve el sistema de ecuaciones*

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & -2 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

20 (Selectividad 2004 - Modelo 2 (Opción B)- Andalucia).

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + \lambda y = \lambda \\ \lambda x + y + (\lambda - 1)z = 1 \\ \lambda x + y = 2 + \lambda \end{cases}$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

21 *(Selectividad 2004 - Modelo 4 (Opción A)- Andalucia).*

Un tendero dispone de tres tipos de zumo en botellas que llamaremos A, B y C. El mencionado tendero observa que si vende a 1€ las botellas del tipo A, a 3€ las del tipo B y a 4€ las del tipo C, entonces obtiene un total de 20€. Pero si vende a 1€ las del tipo A, a 3€ las del B y a 6€ las del C, entonces obtiene un total de 25€.

a) *Plantea el sistema de ecuaciones que relaciona el número de botellas de cada tipo que posee el tendero.*

b) *Resuelve dicho sistema.*

c) *¿Puede determinarse el número de botellas de cada tipo de que dispone el tendero? (Ten en cuenta que el número de botellas debe ser entero y positivo).*

22 (Selectividad 2005 - Modelo 3 (Opción A)- Andalucia).

Considera el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} (b+1)x+y+z=2 \\ x+(b+1)y+z=2 \\ x+y+(b+1)z=-4 \end{array}\right.$$

a) Clasifica el sistema según los valores del parámetro b.

b) Resuelve el sistema cuando sea compatible indeterminado.

23 *(Selectividad 2005 - Modelo 3 (Opción B)- Andalucia).*

Sea I la matriz identidad de orden 3 y sea $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$.

a) *Determina el valor de b para el que $A^2-2A+I=O$, donde O es la matriz nula de orden 3.*

b) *Para $b=2$ halla la matriz X que cumple que $AX-2A^t=O$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.*

24 (Selectividad 2005 - Modelo 4 (Opción A)- Andalucia).

Álvaro, Marta y Guillermo son tres hermanos. Álvaro dice a Marta: si te doy la quinta parte del dinero que tengo, los tres hermanos tendremos la misma cantidad. Calcula lo que tiene cada uno si entre los tres juntan 84 euros.

25 *(Selectividad 2005 - Modelo 3 (Opción B)- Andalucia).*

Considera el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + my + z = 0 \\ x + y + mz = 2 \\ mx + y + z = m \end{cases}$$

a) *¿Para qué valor de m el sistema tiene al menos dos soluciones?.*

b) *¿Para qué valores de m el sistema admite solución en la que $x = 1$?.*

26 (Selectividad 2005 - Modelo 6 (Opción A)- Andalucia).

En una excavación arqueológica se han encontrado sortijas, monedas y pendientes. Una sortija, una moneda y un pendiente pesan conjuntamente 30 gramos. Además, 4 sortijas, 3 monedas y 2 pendientes han dado un peso total de 90 gramos. El peso de un objeto deformado e irreconocible es de 18 gramos. Determina si el mencionado objeto es una sortija, una moneda o un pendiente, sabiendo que los objetos que son del mismo tipo pesan lo mismo.

27 *(Selectividad 2006 - Modelo 5 (Opción A)- Andalucia).*

Considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + \lambda y + z = 8 \\ \lambda x + y + \lambda z = 10 \end{cases}$$

a) *Clasifica el sistema según los valores del parámetro λ.*

b) *Resuelve el sistema para $\lambda = 2$.*

28 (Selectividad 2006 - Modelo 5 (Opción B) - Andalucia).

Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ m-4 & 1 & 1-m \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ y } O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Halla el valor de $m \in \mathbb{R}$ para el que la matriz A no tiene inversa.

b) Resuelve $AX = O$ para $m = 3$.

29 *(Selectividad 2007 - Examen oficial (Opción B) - Andalucia).*

Resuelve

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

30 (Selectividad 2009 - Examen oficial (Opción A) - Andalucia).

Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Indica los valores de m para los que A es invertible.

b) Resuelve la ecuación matricial $XA-B^t=C$, para $m=0$. (B^t es la matriz traspuesta de B).