Tema 10: Combinatoria.

En este tema, vamos a perfeccionar una técnica que todos conocemos desde pequeños, vamos a "aprender a contar". Lógicamente, todos habéis contado cosas en vuestra vida desde pequeños (número de hermanos, monedas que tengo en la cartera, etc …). En este tema profundizaremos en estos conceptos y aprenderemos los denominados números combinatorios. Finalizaremos el tema con dos apéndices interesantes sobre el Triángulo de Tartáglia o Pascal y sobre el binomio de Newton.

1.- Conceptos fundamentales de combinatoria. Factorial de un número.

Antes de meternos en materia debemos de fijar una serie de conceptos que son fáciles pero que debemos de tener claros. Para contar algo, necesitamos un conjunto de elementos que queremos contar, el cual denominamos **población**. De la población, quizás no nos interese contar toda ella, por ejemplo, si tenemos que hacer una encuesta sobre que programa de televisión le gusta a los españoles, no nos interesa ir uno por uno preguntando, por lo que de esa población tomaremos un subconjunto que denotaremos por **muestra**. Denotaremos a los elementos de mi población con la letra $\boldsymbol{m}$ y los elementos de la muestra con la letra $\boldsymbol{n}$.

Ahora bien, en ciertos casos debemos estudiar si entre los elementos de una muestra es importante el **orden** que presentan entre ellos o no y además, si en la misma población, los elementos se **repiten** o no. Es por ello, que dependiendo de si existen o exigimos estas características a la hora de realizar nuestro conteo, debemos de utilizar unas técnicas u otras que aprenderemos a lo largo de este tema.

Pasamos entones a definir un concepto importante, el concepto de **factorial de un número**:

Definimos al factorial de un número n, al producto de los n factores consecutivos, desde él mismo hasta 1 y se denota por $\boldsymbol{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$.

Por ejemplo, el factorial de 5 sería: $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Excepcionalmente, el factorial de 0 vale 1. El factorial apareció cuando se intentó estudiar una de las características que hemos nombrado antes, la ordenación, ya que representa el número de formas distintas de ordenar n objetos.

2.- Permutaciones.

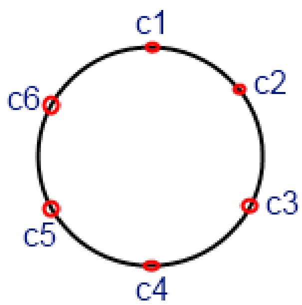
Las **permutaciones** es una técnica que nos permite agrupar n elementos de forma que entran todos los elementos (no sobra ninguno) e importa el orden. Dependiendo de si se repiten los elementos o no, definiremos varios tipos de permutaciones. Veamos pues, los distintos tipos de permutaciones y un ejemplo de cada uno de ellos:

1. **Permutaciones sin repetición:** Puesto que no se repiten los elementos, estas permutaciones nos permiten agrupar (ordenar) los elementos y contar las distintas formas de agruparlos. En este caso, las permutaciones coinciden con el factorial de un número y las definimos por $P_n = n!$, donde n es el número de elementos.

   Por ejemplo, calcular cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los números 1, 2 y 3, sin que se repitan. Para ello, podríamos ir viendo como agruparlos por la "cuenta de la vieja", en este caso serían, 123, 132, 213, 231, 312, 321. Habría 6, que coincide con $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

2. **Permutaciones circulares:** Este tipo de permutaciones es un caso particular de las permutaciones sin repetición. Supongamos que podemos colocar los elementos en una rueda y queremos cambiarlos de orden, pero en este caso, el primer elemento que coloquemos será también nuestro último elemento, por lo tanto tendremos $n-1$ elementos para ordenar. Definimos pues las permutaciones circulares mediante la expresión: $PC_n = P_{n-1} = (n-1)!$.

   Por ejemplo, supongamos que hay una cena de empresa y tenemos que sentar a los invitados en una mesa circular. Los invitados son 6 y queremos ver de cuantas formas los podemos sentar en esa mesa de 6 posiciones. Fijándonos en el gráfico tendríamos lo siguiente:



   Supongamos que el primero en sentarse es C1, entonces tenemos 5 posibles formas de sentar a los demás comensales, luego sería: $PC_6 = P_5 = (6-1)! = 5! = 120$.

3. **Permutaciones con repetición:** En este caso, permitimos repetición de elementos. En este caso, debemos tener en cuenta el número de veces en las que se repite los elementos, por ejemplo, supongamos que tenemos n elementos donde el primer elemento se repite a veces, el segundo b veces, el tercero c veces, …, y así sucesivamente. En este caso denotamos las permutaciones con repetición de la siguiente forma $PR_n^{a,b,c,\ldots} = \frac{P_n}{a!\cdot b!\cdot c!\cdot\ldots} = \frac{n!}{a!\cdot b!\cdot c!\cdot\ldots}$, donde n es el número de elementos que tenemos y el denominador indica las distintas ordenaciones de los elementos que se repiten.

Por ejemplo para calcular las permutaciones de los elementos 2 y 3, donde el elemento 2 se repite 4 veces y el elemento 3 no se repite tenemos pues estos elementos 2,2,2,2,3 en total 5 elementos, entonces:

$$PR_5^{4,0} = \frac{5!}{4! \cdot 0!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 1}{1} = 5$$

Ejercicios.

1. Calcular las permutaciones de los siguientes elementos:
   a) 8
   b) 6
   c) 3
2. ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4,5 si ninguno se puede repetir? ¿Y en caso de que permitiésemos repetición?.
3. Calcular de cuantas formas posibles se pueden sentar 8 personas en una fila de butacas de 8 huecos. ¿Y si fuesen de 10 huecos?.
4. Calcular las permutaciones circulares de los siguientes elementos:
   d) 8
   e) 6
   f) 3
5. Calcular el número de palabras distintas que se pueden formar con la palabra RELOJ y con la palabra RELEVARSE.
6. Con los números 2,3,2,5,7,8,2,5,9,6,6,6,1. ¿Cuántos números de 13 cifras se pueden formar?.
7. Supongamos que tenemos un barco con su correspondiente palo de señales en el que se pueden izar, velas blancas, rojas y negras. Tenemos 3 blancas, 2 rojas y 6 negras. ¿Cuántas señales distintas se pueden formar?.

3.- Variaciones.

Supongamos ahora que tenemos un conjunto de m elementos y vamos a contar cuantos subconjuntos de n elementos (tomados de n en n) podemos formar. A esta técnica se le denomina **variación** y es muy útil a la hora de formar listas en los que importe el orden, de modo que cuándo nos pidan contar una serie de elementos en orden, normalmente utilizaremos variaciones. Al igual que en las permutaciones, vamos a distinguir dos tipos de variaciones, con sus respectivas características, y que son las siguientes:

1. **Variaciones sin repetición:** En este tipo de variaciones, no todos los elementos del conjunto (m), deben de entrar, además no se repiten los elementos y si importa el orden. Para calcular las listas en las que no se permite repetición de elementos aplicamos la fórmula $V_m^n = V_{m,n} \; = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$.
   Veamos como formar las variaciones de 3 elementos hasta orden 3:
   Supongamos que tenemos el conjunto {1,2,3}, las listas que podemos formar de 1 solo elemento y ordenados serian la lista del 1, la lista del 2 y la lista del 3, es decir, 3 listas que curiosamente coincide con $V_{3,1} \; = 3 = \frac{3!}{2!} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$.
   Las listas de 2 elementos sería añadirles a esas listas que tenemos los elementos que faltan de modo que resultarían las listas 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33, y eliminamos aquellas que se repiten elementos resultando que el número final de listas es 12, 13, 21, 23, 31, 32, es decir 6 listas que coincide con $V_{3,2} \; = 3 \cdot 2 = \frac{3!}{1!} = 6$.
   Finalmente, las listas de 3 elementos serían 111, 112, 113, 121, 122, 123, 131, 132, 133,211, 212, 213, 221, 222, 223, 231, 232, 233, 311, 312, 313, 321, 322, 323, 331, 332 y 333 pero eliminado resultan: 123, 132, 213, 231, 312, 321 que coincide con $V_{3,3} \; = 3 \cdot 2 \cdot 1 = \frac{3!}{0!} = 6$.

2. **Variaciones con repetición:** En este tipo de variaciones, no todos los elementos del conjunto (m), pueden entrar si $m > n$, donde como ya sabemos, n es el número de elementos que van a ir formando la lista, y si pueden entrar si $m \leq n$. En este caso, si se permite la repetición de elementos y de nuevo importa el orden. La expresión general de cálculo es $VR_m^n = m^n$**.** Por ejemplo, para calcular cuántos números de 2 cifras se pueden formar con los números 3, 4 y 5, serían: $VR_3^2 = 3^2 = 9$. En efecto, estás serían: 33, 34, 35, 43, 44, 45, 53, 54, 55.

Ejercicios.

1. Calcular las variaciones y escribir la lista de:
   a) 6 elementos tomados de 3 en 3.
   b) 4 elementos tomados de 2 en 2.
2. ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4,5 si ninguno se puede repetir? ¿Y en caso de que permitiésemos repetición?.
3. ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con los dígitos 0,1,2,3,4,5 si ninguno se puede repetir y considerando que el dígito 0 no puede aparecer al principio? ¿Y en caso de que permitiésemos repetición?.
4. Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior, suponiendo que 0 puede estar al principio.

5. A un concurso literario se han presentado 10 candidatos con sus novelas. El cuadro de honor lo forman el ganador, el finalista y un accésit. ¿Cuántos cuadros de honor se pueden formar?.
6. ¿Cuántas quinielas de 1 columna han de rellenarse para asegurar el acierto de los 15 resultados?.

4.- Combinaciones. Números combinatorios.

Pasamos ahora a estudiar una forma de "hacer grupos". De nuevo, supongamos que tenemos un conjunto de m elementos y los tomamos de n en n. Llamamos pues **combinaciones** de m elementos tomados de n en n a las distintas agrupaciones que podemos hacer con esos m elementos de forma que, no entran todos los elementos, no importa el orden y no se repiten los elementos. Aunque hay dos tipos de combinaciones, solo vamos a estudiar un único tipo: las combinaciones simples.

La expresión general para calcularlas es: $C_m^n = C_{m,n} = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$.

Veamos dos ejemplos de aplicación:

- Calcular el número de combinaciones de 10 elementos tomados de 4 en 4.
$C_{10}^4 = C_{10,4} = \frac{10!}{4!\cdot(10-4)!} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\cdot 6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 10\cdot3\cdot7 = 210.$
- En una clase de 25 alumnos, queremos elegir grupos para hacer un trabajo. Los grupos son de 3 personas. ¿Cuántos grupos podemos formar?.
Primero vemos que se cumplen las hipótesis, es decir, ¿Importa el orden? No, ya que los alumnos son equivalentes. ¿Se repiten los elementos? No, ya que cada alumno es único. ¿Entran todos los elementos? No, ya que hay 25 alumnos y solo entran en cada grupo 3 de los alumnos. Por lo tanto aplicamos combinaciones y obtenemos el número de grupos aplicando:
$$C_{25,3} = \frac{25!}{3!\cdot 22!} = \frac{25\cdot24\cdot23}{3\cdot2\cdot1} = \frac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 2300.$$

Una vez visto lo que son las combinaciones, veamos otra forma de expresarlas mediante números combinatorios.

Definimos un número combinatorio a la siguiente expresión: $\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\cdot(m-n)!}$

No es más que escribir las combinaciones como una nueva forma de representarlas.

Los números combinatorios tienen una serie de propiedades:

1. $\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1.$
2. $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$
3. $\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$

Ejercicios.

1. Calcular las combinaciones siguientes y exprésalas como números combinatorios:
   a) 6 elementos tomados de 3 en 3.
   b) 15 elementos tomados de 2 en 2.
2. ¿De cuántas formas podemos agrupar los 7 colores del arcoíris tomándolos de 3 en 3? ¿Y de 2 en 2?.
3. En una reunión hay 16 personas y se intercambian saludos entre ellos. ¿Cuántos saludos se han intercambiado? ¿Y si en lugar de 16 hubiesen 30 personas?.
4. Si queremos acertar una lotería de primitiva (6 resultados por columna). ¿Cuántas apuestas debemos echar sabiendo que hay 49 números?.
5. Prueba que $C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n}$.
6. Resuelve la ecuación combinatoria: $C_x^6 = 7C_x^4$.
7. Comprueba las propiedades de los números combinatorios tomando pares de los siguientes valores: 75, 25, 11, 4, 3. Calcula el número de combinaciones que hemos podido formar con esos 5 pares de números.
8. Demuestra las propiedades de los números combinatorios.

5.- Triángulo de Pascal o de Tartáglia.

Introducimos este apartado dentro del tema, como una sección meramente cultural y para explicar posteriormente lo que conocemos como el binomio de Newton. **El triángulo de Pascal o de Tartáglia**, recibe el nombre del matemático Blaise Pascal, que fue aquel que lo popularizó. Este triángulo está formado por números enteros, es infinito y simétrico. Como podemos observar en los siguientes primeros términos, este triángulo puede venir expresados en términos de números combinatorios o bien, por números naturales:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

En el esquema anterior hemos representado los dos primeros niveles (el nivel inicial para $n = 0$, no se considera como nivel), pero tiene infinitos niveles, es decir, podemos extenderlo todo lo que queramos por eso es infinito:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$
$$\binom{5}{0} \quad \binom{5}{1} \quad \binom{5}{2} \quad \binom{5}{3} \quad \binom{5}{4} \quad \binom{5}{5}$$
$$\vdots$$

Si expresamos esos números combinatorios como números naturales y, aplicando las propiedades de los números combinatorios, obtenemos la siguiente expresión del triángulo:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

En el esquema siguiente hemos representado hasta el onceavo nivel. La construcción del triángulo es tan sencilla como que en cada nivel, colocamos los números combinatorios correspondientes al mismo nivel. Los extremos de cada nivel son siempre 1 y es totalmente simétrico respecto al eje central.

Si nos fijamos bien, cada nivel tiene un elemento más que el nivel anterior. Si nos fijamos ahora en un número cualquiera y sumamos justamente los valores del nivel anterior que están justo encima, nos da el valor que hemos seleccionado. Si elegimos un valor y sumamos la diagonal hacia la izquierda justo encima de él, nos da ese valor seleccionado.

Además de estas curiosas operaciones, el Triángulo de Pascal, tiene aplicaciones en probabilidad, combinatoria y series numéricas. Como hemos comentado antes, podemos obtener el famoso binomio de Newton a través de él.

6.- Binomio de Newton.

¿Recordáis de temas anteriores lo que eran las identidades notables?. Pues bien, el **binomio de Newton**, nos permite calcular estas identidades de forma general. La fórmula general de binomio de newton viene dada por la expresión:

$$(a \pm b)^n = \binom{n}{0} a^n \pm \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 \pm \cdots \pm \binom{n}{n-1} a^{n-(n-1)}b^{n-1} \pm \binom{n}{n} b^n$$

El número de términos es $n+1$ y el valor n corresponde al nivel n del Triángulo de Pascal, es decir, si queremos calcular $(a \pm b)^3$, debemos de fijarnos en el 3° nivel e ir sustituyendo según los valores que van apareciendo en los exponentes de los términos correspondientes. Por ejemplo en este caso, como los valores serian 1, 3,3,1, resultaría:

$$(a \pm b)^3 = \binom{3}{0} a^{1} \pm \binom{3}{1} a^{3-1}b + \binom{3}{2} a^{3-2}b^2 \pm \binom{3}{3} b^{1}.$$

La suma de los exponentes de a, b deben de sumar n. Si uno de los términos es negativo, entonces se alternan los signos.

Veamos un ejemplo de aplicación:

- Calcular $(x+2y)^5$: Al ser los dos términos positivos, al desarrollar no se alternan los signos sino que son todos positivos.

$$(x+2y)^5 = \binom{5}{0} x^5 + \binom{5}{1} x^4 \cdot 2y + \binom{5}{2} x^3 \cdot 2^2y^2 + \binom{5}{3} x^2 \cdot 2^3y^3 + \binom{5}{4} x \cdot 2^4y^4 + \binom{5}{5} 2^5y^5$$
$$= x^5 + 10x^4y + 40x^3y^2 + 80x^2y^3 + 80xy^4 + 32y^5$$

El binomio de Newton nos permite calcular los coeficientes y los exponentes de los polinomios.

Las expresiones generales para obtener un término concreto de un binomio vienen dadas por:

- <u>Si el desarrollo es del tipo $(a+b)^n$:</u> $T_k = \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)}b^{k-1}$.
- <u>Si el desarrollo es del tipo $(a-b)^n$:</u> $T_k = (-1)^{k-1}\binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)}b^{k-1}$.

  Donde k es el término que queremos calcular.

Por ejemplo, para calcular el 2° término de $(2+x)^2$, tomamos la 1° expresión y hacemos:

$T_2 = \binom{2}{2-1} 2^{2-(2-1)}x^{2-1} = 2 \cdot 2 \cdot x = 4x$. Si desarrollamos vemos que $(2+x)^2 = 2^2 + 4x + x^2$. Luego es cierto que coinciden.

1. Forma todos los números de 4 cifras que se pueden hacer con los dígitos 1 y 2. ¿Cuántos son?
2. ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden hacer con los dígitos 0 y 1? (Nota: el número 01000 no es un número de 5 cifras).
3. Si queremos hacer lápices bicolores de doble punta y disponemos de los colores rojo, azul, verde, naranja, lila y amarillo. ¿Cuántos modelos se pueden formar?. Escríbelos.
4. Queremos formar una liga de 10 equipos. ¿Cuántos partidos han de disputarse?. ¿Y si se jugasen ida y vuelta?.
5. Las expresiones $VR_{8,2}, P_8, V_{8,2}, C_{8,2}$, corresponden a soluciones de los siguientes apartados. Decide a cuales pertenecen y calcula dichas expresiones:
    a) Palabras de 8 letras, con o sin sentido, que se pueden hacer con las letras de la palabra PELICANO.
    b) Posibles parejas que se pueden formar para jugar un torneo de ajedrez entre 8 personas.
    c) Número de 2 cifras que se pueden formar con los dígitos 1,2,3,4,5,6,7 y 8.
    d) Posibles formas de dar el primer y segundo premio de un concurso de matemáticas en el que participan 8 personas.
6. Para formar un equipo de futbol sala hace falta 5 jugadores y el entrenador tiene a 9 jugadores. ¿Cuántos equipos distintos puede formar?. ¿Y si fija a 2 jugadores?.
7. Se celebran elecciones para elegir al presidente, tesorero y secretario de una comunidad. ¿De cuántas formas se pueden elegir dichos candidatos si se presentan 12 a las elecciones?.
8. Calcular el número de *bytes* que se pueden formar en un lenguaje de ordenador si una palabra consta de 8 dígitos de 0 y 1.
9. Las 28 fichas de un dominó se reparten entre 4 jugadores. ¿Cuántos juegos distintos de fichas puede tener cada jugador?.
10. Para matricularte en un curso haz de elegir 3 asignaturas de las siguientes: Matemáticas, tecnología, física, química, inglés, francés, lengua, informática, dibujo y alemán. ¿De cuántas formas puedes hacer la elección?. Si además tienes que elegirlas en orden de preferencia, ¿cuántas ordenaciones puedes hacer?
11. Calcular el 14º nivel del Triángulo de Tartáglia.
12. Desarrolla:
    a) $(2\mathrm{x} - 3\mathrm{yz})^6$
    b) $(12 - 3\mathrm{x})^5$
    c) $\left(\sqrt{5} + x^2\right)^4$
13. Calcula el término 7 de $(12 - x^2y^3)^{12}$.
14. Calcula el término 16 de $(1005 + x^9)^{24}$

7.- Apéndice.

7.1- Aplicación del Triángulo de Pascal a la probabilidad.

Como comentábamos antes, el Triángulo de Pascal se utiliza en varios campos matemáticos y es muy útil. Me parecía interesante enlazar este tema con el siguiente (Probabilidad), mediante un apéndice.

Para no extenderme mucho, ya que en el próximo tema tendremos material para ello, definimos brevemente y nocivamente lo que es la probabilidad. La probabilidad no es más que medir la posibilidad de que ocurra algo, por lo tanto si tenemos la posibilidad de que ocurran X sucesos de un número N de sucesos, la probabilidad de que ocurra será el cociente entre los casos posibles y los casos totales, es decir, si tengo 4 botellas de distintos colores: verde, azul, amarillo y negro (casos totales) y quiero sacar una verde (casos posibles), la probabilidad de sacar verde es $\frac{numero\ de\ botellas\ verdes}{numero\ total\ de\ botellas} = \frac{1}{4}$.

Esta relación o expresión debe su nombre a un matemático llamado LaPlace. Una vez introducido el concepto básico de probabilidad, pasamos a ver su relación con el Triángulo de Pascal. El triángulo nos permite calcular probabilidades referentes a dos sucesos, es decir, solo nos permite calcular probabilidades si distinguimos entre todos los casos posibles que ocurra una cosa u otra, por ejemplo, si tenemos 4 bolas, calcular la probabilidad de que 2 sean rojas y 2 negras.

Fijándonos en el triángulo, cada nivel nos indica el número total de casos que tenemos. Los extremos indican las probabilidades de que ocurra un suceso u otro, y los valores intermedios indican las probabilidades de que salgan 1 de un tipo y los demás de otro, 2 de uno y los demás de otro,… y así sucesivamente.

En el ejemplo anterior, como tenemos 4 bolas, debemos de fijarnos en el 4º nivel, cuyos valores son 1,4,6,4,1. En este caso los casos totales es la suma de esos valores (16). Los extremos nos indican la probabilidad de que todas las bolas sean rojas, y el valor en el que estamos situados es el número de casos favorables, es decir, la probabilidad sería $\frac{1}{16}$ que es la misma a que todas las bolas fuesen negras. Posteriormente, la probabilidad de que 1 fuese roja y las 3 restantes negras, sería el siguiente valor de la fila del nivel del triángulo $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ y que es la misma probabilidad que sacar 1 bola negra y 3 rojas. El valor central nos indica sacar la mitad de un caso y la mitad de otro, es decir, $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$, la cual es la solución a nuestra pregunta inicial.

Este mismo problema lo abarcaremos en el siguiente tema y veremos que los resultados son similares.

Ejercicios.

1. Calcular, utilizando el triángulo de Tartáglia, la probabilidad de que de 4 niños, 2 sean hembras y 2 sean varones.
2. Lanzamos 6 monedas. Calcular las probabilidades de:
   a) Los 6 lanzamientos son caras.
   b) Obtenemos 2 caras y 4 cruces.
   c) Obtener 3 cruces y 3 caras.
   d) Los 6 lanzamientos son cruces.
3. Tengo 7 bolas, blancas y negras. Calcular las probabilidades de:
   a) Obtener 7 blancas.
   b) Obtener 3 negras (ó 4 blancas).
   c) Obtener 5 blancas (ó 2 negras).