Tema 11: Probabilidad.

Como comentamos al final del tema anterior, comenzamos el tema de probabilidad definiendo formalmente el concepto y los principales elementos que la forman. Continuaremos estudiando las propiedades de la probabilidad y la Ley de LaPlace. Finalmente introduciremos unos mecanismos para facilitarnos el uso de probabilidades.

1.- ¿Qué es la probabilidad?. Definición y conceptos fundamentales.

Definimos la **probabilidad** como un número comprendido entre 0 y 1, que indica las posibilidades que tiene de verificarse un determinado suceso, cuando se realiza lo que denominamos un **experimento aleatorio**.

Ahora bien, un experimento aleatorio es aquel en el que no se puede predecir el resultado ya que depende del azar, como por ejemplo, lanzar una moneda al aire o lanzar un dado.

Pasamos pues a definir los principales conceptos asociados a la probabilidad:

Definimos un **suceso** como cada uno de los resultados que podemos obtener de un experimento aleatorio.

Definimos el **espacio muestral** como el conjunto de todos los posibles resultados que puede presentar un experimento aleatorio y lo denotamos por la letra griega Ω . (No olvidemos que el espacio muestral es un conjunto, por lo tanto se denota con llaves { }).

Definimos un **suceso aleatorio** como cualquier subconjunto del espacio muestral.

Veamos dos ejemplos:

- Lanzamos una moneda, cuyos resultados son cara o cruz, dos veces.
  - Espacio muestral: $\Omega = \{(Cara, Cara), (Cara, Cruz), (Cruz, Cara), (Cruz, Cruz)\}$
  - Sucesos posibles: A = Sacar dos caras $= \{(Cara, Cara)\}$, D = Sacar al menos una cara $= \{(Cara, Cara), (Cara, Cruz), (Cruz, Cara)\}$.
- Una bolsa contiene bolas blancas (B) y negras (N). Sacamos 3 bolas.
  - Espacio muestral: $\Omega = \{(B,B,B), (B,B,N), (B,N,B), (B,N,N), (N,B,B), (N,B,N), (N,N,B), (N,N,N)\}$. (Al ser listas el espacio muestral, podemos calcular los elementos haciendo variaciones con repetición, en este caso: $VR_2^3 = 2^3 = 8$).
  - Sucesos posibles: A = Extraer tres bolas del mismo color $= \{(B,B,B), (N,N,N)\}$, B = Extraer al menos dos bolas blancas$= \{(B,B,B), (B,B,N), (B,N,B), (N,B,B)\}$.

Hay más sucesos posibles que podemos obtener en cada ejemplo, pero los dejamos propuestos como ejercicios para el lector.

Definimos el **espacio de sucesos (S)** como el conjunto de todos los sucesos aleatorios, incluidos el suceso imposible $\emptyset$ y el suceso total o seguro. En primer ejemplo, el espacio de sucesos sería $S = \{\emptyset, Cara, Cruz, (Cara, Cruz)\}$.

Como hemos podido ver en los ejemplos anteriores, podemos calcular el número de sucesos del espacio muestral con variaciones con repetición.

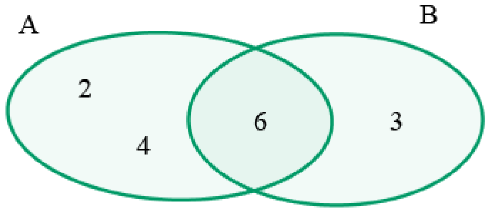
2.- Operaciones con sucesos: Unión, intersección, diferencia y complementario.

Los sucesos, han ser objetos matemáticos con buenas propiedades, nos permiten operar con ellos como si se tratasen de valores numéricos y no de conjuntos, sin olvidar, que si es un conjunto claro está. Es por ello, que hemos definido unas operaciones, que aumentarían la cantidad de sucesos que podemos formar, al igual que si en un conjunto formado por los valores $\{1,2,3\}$ lo aumentamos con los elementos de la suma $\{1,2,3,1+3=4,2+3=5\}$ por ejemplo. Pasamos pues a definir estas operaciones y sus propiedades:

- **Unión:** La unión de sucesos la representamos mediante el símbolo $\cup$. Dados dos conjuntos A, B definimos la unión de ellos y la representamos por $A \cup B$, como el suceso formado por todos los elementos de A y de B, es decir, el suceso unión se verifica cuando ocurre A, o B, o ambos.
  La unión la podemos identificar como "la suma" de conjuntos. Como operación, tiene sus propiedades:

  1. Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$.
  2. Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
  3. Idempotente: $A \cup A = A$.
  4. Elemento neutro: $A \cup \emptyset = A$.
  5. Totalidad o Absorción: Si E es el espacio total entonces $A \cup E = E$

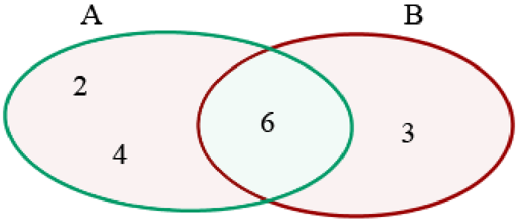
  ➢ Ejemplo de unión: Dados $A = \{2,4,6\}, B = \{3,6\}$. $A \cup B = \{2,3,4,6\}$.
  Gráficamente:



- **Intersección:** La intersección de sucesos la representamos mediante el símbolo $\cap$. Dados dos conjuntos A, B definimos la intersección de ellos y la representamos por $A \cap B$, como el suceso formado por todos los elementos que son a la vez de A y de B, es decir, el suceso intersección se verifica cuando ocurre A, y B, a la vez.
La unión la podemos identificar como "el producto" de conjuntos. Como operación, tiene sus propiedades:

    1. Conmutativa: $A \cap B = B \cap A$.
    2. Asociativa: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
    3. Idempotente: $A \cap A = A$.
    4. Elemento neutro: $A \cap E = A$.
    5. Absorción: $A \cap \emptyset = \emptyset$.

    - Ejemplo de intersección: Dados $A = \{2,4,6\}, B = \{3,6\}$. $A \cap B = \{6\}$.
    Gráficamente:

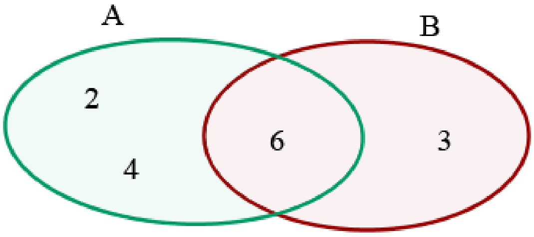


La unión de sucesos y la intersección, cumplen propiedades juntas, al igual que la suma con el producto, estas son:

1. Simplificación: $A \cup (A \cap B) = A$ y $A \cap (A \cup B) = A$
2. Distributiva: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ y $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- **Diferencia:** La diferencia se puede identificar como la resta. Dados dos conjuntos A, B definimos la diferencia de ellos y la representamos por $A - B$, como el suceso formado por todos los elementos que están en A y no en B, es decir, el suceso diferencia se verifica cuando ocurre A, y no B.

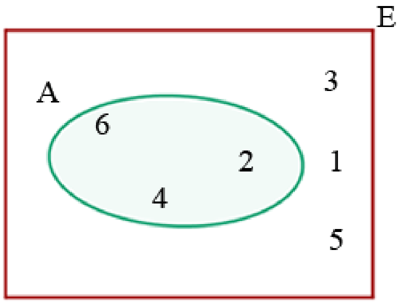
    - Ejemplo de diferencia: Dados $A = \{2,4,6\}, B = \{3,6\}$. $A - B = \{2,4\}$.
    Gráficamente:



- **Complementario:** El complementario de un conjunto es lo contrario a ese conjunto, en este caso, lo definimos como todo aquellos elementos que están en el total y no están en el conjunto. Lo representamos mediante una barra encima del conjunto o una pequeña "c", es decir, el complementario de un conjunto A es A^c o $\bar{A}$, y para calcularlo consideramos el total E y hacemos $A^c = \bar{A} = E - A$. Las propiedades de la operación complementario son:

  1. $\bar{\bar{A}} = A$
  2. $\bar{E} = \emptyset$
  3. $\bar{\emptyset} = E$
  4. $\bar{A} \cup A = E$
  5. $\bar{A} \cap A = \emptyset$

  - Ejemplo de complementario: Si lanzamos un dado y consideramos el suceso $A = \{2,4,6\}$ que es "salir un resultado par", el total sería $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ y por lo tanto el suceso complementario sería "obtener resultado impar", luego $\bar{A} = A^c = E - A = \{1,3,5\}$. Gráficamente:



El complementario, la unión y la intersección, cumplen una serie de propiedades muy importantes y útiles que reciben el nombre de su matemático fundador: Las leyes de Morgan:

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Para terminar este apartado, damos las definiciones de compatibilidad e incompatibilidad:

Decimos que dos sucesos son **compatibles**, cuando la intersección de ellos es no vacia, es decir, A, B son compatibles si y solo si $A \cap B \neq \emptyset$.

Decimos pues, que dos sucesos son **incompatibles** si y solo si $A \cap B = \emptyset$.

Ejercicios.

1. Haz una representación gráfica de cada una de las propiedades de la unión. (Nota: elige dos conjuntos que prefieras y realiza el ejercicio).
2. Haz una representación gráfica de cada una de las propiedades de la intersección. (Nota: elige dos conjuntos que prefieras y realiza el ejercicio).
3. Haz una representación gráfica de cada una de las propiedades de la diferencia. (Nota: elige dos conjuntos que prefieras y realiza el ejercicio).
4. Haz una representación gráfica de cada una de las propiedades del complementario.
5. Haz una representación gráfica de las leyes de Morgan.
6. Lanzamos un dado. Calcula:
    a) El espacio total.
    b) El suceso: $A =$"Obtener par"
    c) El suceso: $B =$"Obtener impar"
    d) El suceso: $A \cup B$
    e) El suceso: $A \cap B$
    f) El suceso: A^c .
    g) ¿Son los sucesos anteriores incompatibles?
7. Lanzamos una moneda 4 veces. Calcula:
    a) El espacio de sucesos y el espacio muestral.
    b) El suceso: $A =$"Obtener 4 caras"
    c) El suceso: $B =$"Obtener al menos 2 cruces"
    d) El suceso: $A \cup B$
    e) El suceso: $A \cap B$
    f) El suceso: $A^c \cup B$.
    g) ¿Son los sucesos anteriores incompatibles?
8. Tengo una caja con 3 bolas distintas (azul,roja,blanca), realizo dos extracciones, siempre devolviendo la bola una vez que la he sacado. Calcula:
    a) El espacio total, el espacio de sucesos, y el espacio muestral.
    b) El suceso: $A =$"Extraer 2 bolas rojas"
    c) El suceso: $B =$"Extraer al menos 1 azul"
    d) El suceso: $C =$"Extraer al menos 1 negra"
    e) El suceso: $A \cup B$
    f) El suceso: $A \cap C$
    g) El suceso: $B^c \cap A \cup C$.
    h) Comprueba las propiedades asociativas, conmutativa y distributivas con los sucesos A, B, C.
    i) ¿Son los sucesos anteriores incompatibles?

3.- Ley de LaPlace. Axiomas de probabilidad. Propiedades.

Comenzamos una de las secciones que introducimos en el apéndice del tema anterior, le **Ley de LaPlace**, la cual dice: Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay un numero determinado de sucesos equiprobables (n), es decir, igualmente probables, entonces si A es un suceso, la probabilidad de que ocurra es $P(A) = \frac{numero\ de\ casos\ posibles\ de\ A}{número\ de\ casos\ totales\ (n)}$.

Veamos una serie de ejemplos que nos serán de utilidad:

- *Hallar la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire salga 1 cara:*
  Los casos totales de lanzar una moneda dos veces son: $\{(cara, cara), (cara, cruz), (cruz, cara), (cruz, cruz)\}$, es decir 4 casos totales. Los casos posibles de obtener una cara son $\{(cara, cruz), (cruz, cara)\}$, es decir 2 casos posibles, luego $P(obtener\ una\ cara) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.
- *Hallar la probabilidad de que al lanzar dos monedas al aire salga 1 cara o más:*
  Los casos totales de lanzar una moneda dos veces son: $\{(cara, cara), (cara, cruz), (cruz, cara), (cruz, cruz)\}$, es decir 4 casos totales. Los casos posibles de obtener una cara o más son $\{(cara, cara), (cara, cruz), (cruz, cara)\}$, es decir 3 casos posibles, luego $P(obtener\ una\ cara\ o\ más\ (cara \geq 1)) = \frac{3}{4}$.

Una vez introducido formalmente la ley de LaPlace, pasamos a estudiar lo que denominamos Axiomas de la probabilidad, que no son más que una serie de reglas que debe cumplir una probabilidad, estos son:

Axiomas de la probabilidad:

- La probabilidad es positiva y menor igual que 1:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- La probabilidad del suceso total o seguro es 1:

$$P(E) = 1$$

- Si A, B son incompatibles, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Además, la probabilidad cumple una serie de propiedades muy útiles que son las siguientes:

Propiedades de la probabilidad:

1. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. Si $A \subseteq B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.
5. Si tenemos una sucesión de conjuntos $A_1, \ldots, A_n$ incompatibles dos a dos, entonces: $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$
6. Dos sucesos decimos que son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Veamos un ejemplo:

- Lanzamos un dado 1 vez y consideramos el suceso $A =$ "Sacar par"$= \{2,4,6\}$, tenemos que $P(A) = \frac{1}{2}$ Entonces:
  1. $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. El suceso complementario es "Sacar impar", que lógicamente su probabilidad es la otra mitad.
  2. $P(\emptyset) = 0$.
  3. $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c) = P(A) + P(A^c) - P(\emptyset) = 1$.
  4. Como $A \not\subset A^c$ entonces no podemos comprobar esta propiedad.
  5. Como los sucesos A, A^c son incompatibles entonces: $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c) = 1$ como habíamos calculado antes.

Ejercicios.

1. Si en una baraja hay 40 cartas. Calcular:
   a) Probabilidad de obtener "As".
   b) Probabilidad de obtener "Copas"
   c) Probabilidad de obtener "Copas y Bastos"
   d) Probabilidad de obtener "Copas y Figuras"
   e) Probabilidad de obtener "Copas, As y Figuras".
2. Lanzamos un dado al aire. Calcular:
   a) Probabilidad de que salgar par.
   b) Probabilidad de que salga impar.
   c) Probabilidad de obtener múltiplos de 3.
   d) Probabilidad de obtener un valor mayor que 2.
   e) Probabilidad de obtener un valor mayor que 4.

3. Lanzamos un dado al aire 2 veces. Calcular:
    a) Probabilidad de que uno de los valores salga par.
    b) Probabilidad de que el segundo valor salga impar.
    c) Probabilidad de que los dos valores sean pares.
    d) Probabilidad de que la suma sea par.
    e) Probabilidad de que la suma sea impar.
    f) Probabilidad de que la suma sea mayor que 10.
    g) Probabilidad de que la suma sea menor que 4.
    h) Probabilidad de la unión de los sucesos de los apartados a) y d).
    i) Probabilidad de la intersección de los sucesos de los apartados b) y f).
    j) ¿Son independientes los sucesos del apartado a) y b)?¿Y los de d) y e)?.
4. Demuestra las propiedades 1 y 2 de la probabilidad.
5. Dados los sucesos $A = \{Sacar\ al\ perro, tener\ un\ gato, sacar\ un\ 6, vender\ una\ bici\}$ y $B = \{Tener\ un\ pajaro, Sacar\ al\ perro, tener\ un\ gato, Sacar\ un\ As, Sacar\ un\ 4\}$. Calcular:
    a) $A \cup B$.
    b) $P(A)$ y $P(B)$.
    c) $P(A \cup B)$.
    d) $P(A^c)$ y $P(B^c)$.
    e) Comprueba las leyes de Morgan para la probabilidad.
    f) ¿Son incompatibles los sucesos? ¿Son independientes?.

4.- Probabilidad condicionada.

Veamos ahora el caso de calcular la probabilidad de un suceso, sabiendo que antes ya ha ocurrido otro. A este hecho se le denomina, **probabilidad condicionada**, ya que la probabilidad del suceso en cuestión está condicionada por el suceso anterior. Dados dos sucesos A, B, decimos que la probabilidad de que el suceso A ocurra condicionado a que el suceso B ya ha ocurrido, es $P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Veamos un ejemplo:

- *Calcular la probabilidad de sacar un 6 en un dado, sabiendo que ha salido par.*

  Definimos $A =$ "Sacar seis" entones tenemos que $P(A) = \frac{1}{6}$, y definimos $B =$ "Sacar par" $= \{2,4,6\}$, luego $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Definimos el suceso $A \cap B$ ="Sacar un 6 y sacar par", luego $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{6}$, entonces aplicando la expresión resulta $P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$.

Ejercicios.

1. Demuestra que si dos sucesos son independientes entonces $P(A\backslash B) = P(A)$. ¿Es cierto que si $P(A\backslash B) = P(A)$ entonces los sucesos A, B son independientes?. Razónalo.
2. Lanzamos una moneda 3 veces. Calcular:
   a) Probabilidad de obtener una cruz sabiendo que antes salió al menos una cara.
   b) Probabilidad de obtener dos cruces sabiendo que antes salió una cruz.
   c) Probabilidad de obtener dos caras, sabiendo que antes salió cruz.
3. Tenemos una urna con 4 bolas (1 Roja, 1 verde, 2 negras). Realizamos dos extracciones.
   a) Calcular la probabilidad de obtener una bola roja en la 2º extracción, sabiendo que antes saque una bola verde.
   b) Calcular la probabilidad de obtener una bola negra sabiendo que antes saque una bola roja.
   c) Calcular la probabilidad de sacar una roja, sabiendo que antes saque roja.
   d) Calcular la probabilidad de sacar una negra, sabiendo que antes saque negra.

5.- Tablas de contingencia.

En este apartado, nos basamos en todo lo que conocemos para simplificar el cálculo de probabilidades y aprender una técnica que nos reducirá en tiempo los resultados que queremos conocer, hablamos pues de las **tablas de contingencia**, las cuales nos representan bastantes datos y nos proporciona mucha información (toda la que queremos saber), con solo observarla.

Normalmente, tendremos datos, a partir de los cuales podremos obtener los datos restantes de la tabla. Dados los sucesos A, B construimos la tabla de contingencia que tiene la forma siguiente:

$\cap$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A^c}$	
$\boldsymbol{B}$	$P(B \cap A)$	$P(B \cap A^c)$	$P(B \cap A) + P(B \cap A^c)$
$\boldsymbol{B^c}$	$P(B^c \cap A)$	$P(B^c \cap A^c)$	$P(B^c \cap A) + P(B^c \cap A^c)$
	$P(A)$	$P(A^c)$	1

Equivalentemente, esta tabla puede expresarse de este modo:

$\cap$	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{A^c}$	
$\boldsymbol{B}$	$Elementos\ de\ A\ y\ B$	$Elementos\ de\ A^c y\ B$	$Suma\ de\ la\ fila\ 1$
$\boldsymbol{B^c}$	$Elementos\ de\ B^c y\ A$	$Elementos\ de\ B^c y\ A^c$	$Suma\ de\ la\ fila\ 2$
	$Elementos\ de\ A$	$Elementos\ de\ A^c$	$Numero\ de\ elementos\ totales$

Veamos un ejemplo:

- *De 50 trabajadores de una empresa, 30 son hombres y 20 mujeres. 35 de ellos tienen automóviles, 15 son mujeres y los otros 20 hombres.*
  a) *Calcular la probabilidad de ser un hombre y tener automóvil.*
  b) *Calcular la probabilidad de no tener automóvil sabiendo que eres mujer.*

Construimos nuestra tabla:

$\cap$	$\boldsymbol{Hombre}$	$\boldsymbol{Mujer}$	
$\boldsymbol{Con\ automovil}$	20	15	35
$\boldsymbol{Sin\ automovil}$	¿?	¿?	¿?
	30	20	50

Los elementos que no conocemos, los calculamos operando con la tabla, luego resulta:

$\cap$	$\boldsymbol{Hombre}$	$\boldsymbol{Mujer}$	
$\boldsymbol{Con\ automovil}$	20	15	35
$\boldsymbol{Sin\ automovil}$	10	5	15
	30	20	50

Para pasar la tabla a probabilidad, aplicamos la Ley de LaPlace a todos los elementos, dividiendo pues, por el número total de elementos (50)

$\cap$	$\boldsymbol{Hombre}$	$\boldsymbol{Mujer}$	
$\boldsymbol{Con\ automovil}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{15}{50}$	$\frac{35}{50}$
$\boldsymbol{Sin\ automovil}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{15}{50}$
	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Finalmente resolvemos nuestra pregunta. La probabilidad de ser hombre y tener automóvil es $\frac{2}{5}$.

La probabilidad de no tener automóvil siendo mujer es $P(\sin automovil \mid mujer) = \frac{P(Sin\ automovil \cap mujer)}{P(mujer)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

Ejercicios.

1. Se sortea un viaje a Roma entre los 120 mejores clientes de una agencia de automóviles. De ellos, 65 son mujeres, 80 están casados y 45 son mujeres casadas.
    a) Calcular la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre soltero.
    b) Calcular la probabilidad de que le toque el viaje a un hombre casado.
    c) Sabiendo que el afortunado es soltero, calcular la probabilidad de que sea hombre.
    d) Sabiendo que el afortunado no es soltero, calcular la probabilidad de que sea mujer.

2. Tenemos una urna con 8 bolas (5 negras y 3 blancas). Dos de las bolas negras tienen una marca y hay 5 bolas no tienen marca.
    a) Calcular la probabilidad de sacar una bola negra con marca.
    b) Calcular la probabilidad de sacar una blanca sin marca.
    c) Probabilidad de sacar una bola con marca.
    d) Si realizamos dos extracciones, calcula la probabilidad de sacar una blanca con marca, sabiendo que antes sacamos una negra sin marca.

6.- Diagrama de árboles.

Otra de las herramientas útiles que nos permitirá ver con claridad las probabilidades que queremos calcular, son los **diagramas de árboles**. Estos no siempre se podrán hacer, es decir, no todos los problemas permiten diagramas de árboles. Se les denomina así por su "forma" de árbol, ya que está formado por una serie de ramas o caminos que iremos eligiendo para ir formando las probabilidades que necesitemos y luego utilizar.

Para la construcción del diagrama de árbol, realizamos una primera difurcación en dos ramas, sobre las cuales colocamos las probabilidades de las posibilidades que tenemos. Sucesivamente, de cada rama volvemos a difulcar el camino en otras nuevas dos posibilidades y así sucesivamente.

Debemos de tener en cuenta que la suma de las probabilidades de cada dos nuevas ramas abiertas, deben de ser 1.

Denominamos por **nudo**, a cada conjunto de ramas que siguen un mismo camino.

Para calcular las probabilidades, multiplicamos probabilidades que estén en un mismo nudo, y sumamos si utilizamos probabilidades de distintos nudos.

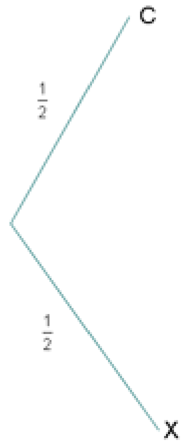
Veamos un ejemplo para verlo más claro:

➢ *Lanzamos una moneda 2 veces. Calcular la probabilidad de:*

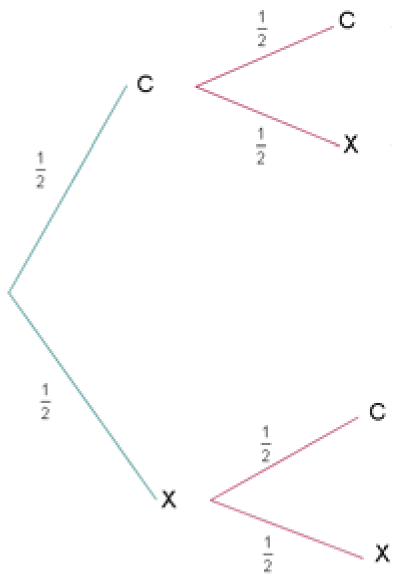
   a) *Obtener dos caras.*

   b) *Obtener 1 cruz y 1 cara.*

La probabilidad de que salga cara o cruz siempre es la misma $\frac{1}{2}$. Tenemos dos posibilidades, cara o cruz, luego estas dos serán nuestras dos primeras ramas o primera difurcación, cada una con sus posibilidades:



Como nuestro problema nos dice que lanzamos la moneda dos veces, volvemos a abrir de cada rama, otras dos posibilidades, resultando el siguiente diagrama de árbol:



Tenemos pues 4 nudos, los cuales son: $Nudos = \{(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)\}$

Nuestro problema nos pedía que calculásemos la probabilidad de obtener dos caras, luego eso se cumple en el primer nudo, luego la probabilidad será el producto de esas probabilidades, entonces $P(Cara)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$.

Ahora, la probabilidad de sacar 1 cruz y 1 cara, la cumplen los nodos 2 y 3, por lo tanto será la suma del producto de probabilidades de los nodos correspondientes: $P(Cruz\ y\ Cara)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

Ejercicios Propuestos.

1. Una clase consta de 7 niñas y 12 niños. Se elige un comité de tres de ellos. Hallar la probabilidad de:
    a) Elegir tres niños
    b) Elegir dos niños y una niña
    c) Elegir dos niñas y un niño, sabiendo que la primera elección fue el niño.
    d) Probabilidad de que el comité esté formado por lo menos por un niño.

    [Nota: Hacer el ejercicio por diagramas de árboles].

2. Lanzamos una moneda tres veces. Calcular la probabilidad de:
    a) Salir tres veces caras.
    b) Salir dos caras y una cruz.
    c) Salir dos caras y una cruz, sabiendo que la primera ha sido cara.

    [Nota: Hacer el ejercicio por diagramas de árboles].

3. En una urna tenemos dos bolas blancas y dos negras. Realizamos extracciones, de modo que la bola que tomamos no la devolvemos a la urna. Calcular la probabilidad de:
    a) Sacar tres bolas blancas y una negra.
    b) Sacar dos bolas blancas y dos negras, sabiendo que la primera bola ha sido negra.

    [Nota: Hacer el ejercicio por diagramas de árboles].

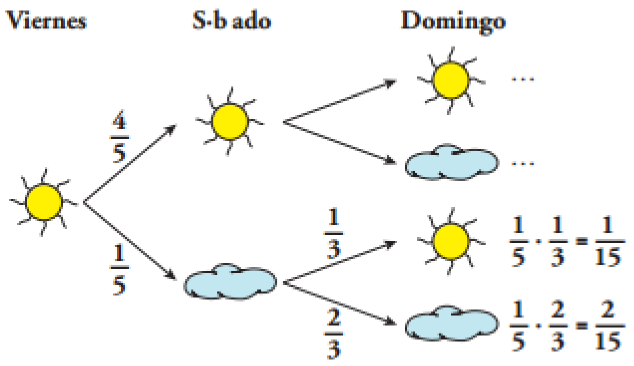
4. En una urna hay 9 bolas numeradas del 1 al 9. Se saca una bola al azar y se anota el número.
    a) Explica si es un experimento aleatorio.
    b) Determina el espacio muestral.
    c) Forma dos sucesos, su unión, su intersección y los contarios de todos los sucesos anteriores.

5. Giramos una ruleta que tiene 6 compartimentos, numerados del 0 al 5 y se apunta el numero donde se detiene la bola.
    a) Explica si es un experimento aleatorio.
    b) Determina el espacio muestral y el espacio de sucesos.
    c) Forma los sucesos contrarios de $A = \{0,2\}, B = \{3,5\}, D = \{2,4,5\}$.
    d) Giramos la ruleta 2 veces y consideramos ahora el suceso $C = \{Suma\ de\ dos\ primeros\ valores, 12, 8\}$. Calcular $A \cup C, A \cap C$.
    e) Indica cuales de los sucesos anteriores son compatibles y cuales no.
6. Lanzamos un dado de 12 caras una sola vez y apuntamos el valor que ha salido.
    a) Determina el espacio muestral y el espacio de sucesos.
    b) Calcula la probabilidad de sacar par.
    c) Calcula la probabilidad de sacar menos de un 5.
    d) Calcula la probabilidad de obtener un múltiplo de 3.
    e) Lanzamos ahora el dado dos veces, y calculamos el valor de la suma. Calcula la probabilidad de sacar más de 16.
7. Escribimos cada una de las letras de la palabra RELOJERIA en una ficha y las ponemos en una bolsa. Luego extraemos una ficha al azar.
    a) Escribe los sucesos elementales de este experimento. ¿Tienen todos la misma probabilidad?. Calcula las probabilidades de los sucesos.
    b) Escribe el suceso "Obtener vocal" y calcula su probabilidad.
8. En una granja tenemos en venta pollos y cerdos. Entre todos tenemos suman 50. El 35% son cerdos y de los pollos, 8 de ellos se alimentan de pienso y los demás de comida sobrante. Calcular la probabilidad de vender un pollo que se alimente de comida sobrante. ¿Qué es más probable, vender pollos que se alimenten con pienso o vender cerdos que se alimenten de comida sobrante?. [Nota: Realiza el ejercicio mediante una tabla de contingencia]
9. En una empresa hay 273 empleados. 171 hombres y 102 mujeres. 45 hombres son fumadores y 83 mujeres no fuman.
    a) Realiza una tabla de contingencia recogiendo los datos.
    b) Calcular la probabilidad de elegir a un empleado hombre y que no fume.
    c) Calcular la probabilidad de elegir a una mujer, sabiendo que no fuma.
    d) Calcular la probabilidad de elegir a un hombre, sabiendo que no fuma.
    e) La jefa de la empresa dice que es más probable elegir un hombre fumador que una mujer no fumadora. ¿Es cierto esa afirmación?.
10. Después de tirar una chincheta varias veces, hemos obtenido que la probabilidad de que caiga con la punta hacia arriba es 0,38. Si tiramos dos chinchetas:
    a) Calcula la probabilidad de que las dos caigan con la punta hacia arriba.
    b) Calcular la probabilidad de que la segunda caiga con la punta hacia arriba.
    c) Calcular la probabilidad de que la segunda caiga con la punta hacia abajo, sabiendo que la primera ha caído con la punta hacia arriba.

11. ¿Cuál es la probabilidad de obtener bola blanca al elegir al azar una de estas bolsas y extraer de ella una bola?. [Nota: Plantea el problema con un diagrama de árbol].

12. Hacemos girar estas ruletas y gana la que consigue la puntuación más alta. ¿Cuál es la probabilidad de que gane A?. ¿Y la que gane B?.

13. En cierto lugar, sabemos que si hace sol, la probabilidad de que mañana también lo haga es de $\frac{4}{5}$. Pero si hoy está nublado, la probabilidad de que mañana lo siga es de $\frac{2}{3}$. Si hoy es viernes y hace sol, ¿Cuál es la probabilidad de que el domingo también haga sol?. Para resolverlo, completa el diagrama siguiente y razona sobre el.



14. Sacamos dos fichas de un dominó. ¿Cuál es la probabilidad de que en ambas la suma de sus puntuaciones sea un número primo?.
15. Calcular la probabilidad de obtener un múltiplo de 2 ó un 6 al lanzar un dado. ¿Son independientes estos sucesos?. ¿Son incompatibles?.
16. Formula un problema de probabilidad, en el que aparezcan al menos 3 sucesos y calcula las probabilidades de ellos y de sus uniones. Dos de los sucesos deben afirmar las preguntas propuestas en el ejercicio 15.