Tema 3: Ecuaciones.

En este tema, estudiaremos las denominadas ecuaciones, que no son más que igualdades entre expresiones algebraicas, junto con una incógnita que debemos encontrar. Empezaremos dando un leve repaso a la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, posteriormente profundizaremos con los distintos tipos que podemos encontrar y finalizaremos el tema con la resolución de sistemas de ecuaciones.

1.- Ecuaciones de primer y segundo grado.

El grado de las ecuaciones nos indican el número máximo de soluciones que puede tener la incógnita para que se verifique. Como bien sabemos una ***ecuación de primer grado*** es una expresión de la forma $2x + 1 = 0$, cuya solución se obtiene de dejar en un lado de la igualdad las variables con sus coeficientes y en el otro lado los términos independientes, operar y finalmente despejar, en este caso la solución sería $x = \frac{1}{2}$. Las ecuaciones de segundo grado, las estudiamos en el epígrafe del tema anterior, por lo que no escribiremos nada sobre ellas para no alargar más el tema, ya que sería repetir de nuevo lo mismo.

2.- Ecuaciones del tipo $(x-a)^n \cdot (x-b)^m \cdot \ldots . = 0$.

Este tipo de ecuaciones no son más que una forma distinta de expresar las soluciones. Son muy sencillas de resolver y el número de soluciones es tanta como suma de exponentes del producto de polinomios, es decir en el ejemplo $(x-2)^2 \cdot (x-1) = 0$, hay 3 soluciones, las cuales se obtienen de igualar cada expresión a cero y despejar como si de una ecuación de primer grado se tratase, en este caso tenemos como soluciones $x = 2$ de forma doble y $x = 1$.

Ejercicios.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones y di de que grado son:
   a) $2x - 6 + 17x = -2x + 1 - 6x + 2$
   b) $\frac{x+3}{5} - \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{5}{4}x - \left(\frac{x+2}{2}\right)^2$
   c) $\frac{(x-1)\cdot(x+2)}{12} - \frac{x-3}{3} = 1 + \frac{(x+1)\cdot(x-2)}{6}$
   d) $(x-2)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\sqrt{3}\right) = 0$
   e) $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(2x-1)^2}{16} = \frac{35}{16}$
   f) $(x-2)\cdot(x+16)\cdot x = 0$

3.- Ecuaciones racionales.

Las ***ecuaciones racionales*** son ecuaciones en las que aparecen fracciones algebraicas y cuya resolución no consiste en más que poner dicha ecuación como una de primer, segundo u otro grado cualquiera, para poder resolverla. Para ello le ponemos el mismo denominador y resolvemos. Finalmente sustituimos las soluciones obtenidas para comprobar que son esas, en caso contrario diremos que no existe solución de la ecuación, por ejemplo tomamos $\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{x-1}=0$. Veamos la resolución de este ejemplo:

- Ponemos mismo denominador con el mínimo común múltiplo que en este caso es $x\cdot(x-1)$, luego nos queda $\frac{1-x}{x\cdot(x-1)}=0$. Despejamos el denominador y obtenemos $1-x=0$, que es una ecuación de primer grado con solución $x=1$. Sustituimos en la ecuación original y vemos que $\frac{1}{1-1}-\frac{1}{1-1}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}$, lo cual implica que como los denominadores se anulan para esa solución, entonces no tiene solución.

4.- Ecuaciones bicuadradas.

Las ***ecuaciones bicuadradas*** son ecuaciones del tipo $ax^4+bx^2+c=0$, donde a,b,c son valores reales. Su resolución es sencilla y también debemos comprobar las soluciones. Para resolverlas debemos de hacer un "truco" que denominamos cambio de variable, el cual nos facilitará la resolución ya que nos transformará la ecuación bicuadrada en una de segundo grado que sabemos resolver, luego deshacemos el cambio y obtenemos las posibles soluciones. Veámoslo con un ejemplo: Tomamos la ecuación $x^4-13x^2+36=0$.

- Hacemos el cambio $z=x^2,\ z^2=x^4$, luego la nueva ecuación queda: $z^2-13z+36=0$, cuya soluciones son $z=9$ y $z=4$. Deshacemos el cambio poniendo en lugar de z su correspondiente x^2, luego obtenemos lo siguiente: $x^2=9,\ x^2=4$, de modo que tenemos 4 posibles soluciones (como era de esperar, ya que la ecuación inicial era de 4º grado), las cuales son $x=\pm 2,\ x=\pm 3$. Comprobamos sustituyendo y obtenemos que son solución

5.- Ecuaciones Irracionales.

Las ***ecuaciones irracionales***, son ecuaciones cuya incógnita se encuentra bajo una raíz. En este tipo de ecuaciones, debemos de tener mucho cuidado, ya que por experiencia, se suelen cometer bastantes errores a la hora de resolverlas, por su pequeña complejidad, por lo tanto, explicaremos su resolución mediante un ejemplo y paso a paso. Tomamos como ejemplo $\sqrt{x-2}-1=0$:

1. Dejamos a un lado de la igualdad los radicales y al otro los valores independientes y las incógnitas, de modo que resulta $\sqrt{x-2}=1$.
2. Elevamos al cuadrado ambos lados de modo que $(\sqrt{x-2})^2=(1)^2$. Por lo tanto, $x-2=1$.
3. Resolvemos la ecuación resultante y nos queda $x=3$.
4. Finalmente comprobamos la solución: $\sqrt{3-2}-1=1-1=0$, por lo tanto $x=3$ es solución.

6.- Ecuaciones de grado superior.

Este tipo de ecuaciones son aquellas que no verifican ser de ninguno de los tipos estudiados anteriormente y que son de grado superior a 2. Para resolverla no tenemos más que aplicar Ruffini y el teorema del resto e ir obteniendo ecuaciones de grado menor. Finalmente expresamos las soluciones como los tipos estudiados anteriormente. Por ejemplo en la ecuación $2x^4+x^3-8x^2-x+6=0$, haciendo Ruffini obtenemos la siguiente descomposición: $(x-1)\cdot(x+1)\cdot(2x^2+x-6)=0$, donde resolviendo la ecuación de 2° grado nos resulta que las soluciones son $x=1, x=-1, x=-2$ y $x=\frac{3}{2}$.

Ejercicios.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:
   a) $\frac{x+2}{x}+3x=\frac{5x+6}{2}$.
   b) $\frac{x-4}{x}-\frac{x-1}{4x}=-3x$
   c) $x-\frac{x-1}{x+1}=\frac{3x-1}{2}$
2. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:
   a) $x^4-4x^2+3=0$
   b) $x^4-25x^2=0$
   c) $x^4-18x^2+81=0$
   d) $(2x^2+1)^2-5=(x^2+2)\cdot(x^2-2)$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:
   a) $x+\sqrt{25-x^2}=2x+1$
   b) $x+1-\sqrt{5x+1}=0$
   c) $\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3-x}=0$
   d) $\sqrt{5x-7}-\sqrt{1-x}=0$

4. Resuelve: $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$.

Una vez estudiados los tipos de ecuaciones finalizamos el tema dedicando un apartado a estudiar la solución, no de una ecuación, sino de un conjunto de ecuaciones, en el cual hay tantas ecuaciones como incógnitas y que ***denominamos sistemas de ecuaciones***. Podemos encontrar sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, veámoslos.

7.- Sistemas de ecuaciones lineales. Métodos de resolución.

Definimos un sistema de ecuaciones ***lineal***, cuando las ecuaciones del sistema son de primer grado. Un ejemplo de sistema lineal es el siguiente: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$. Para resolver los sistemas existen tres métodos que daremos a continuación paso a paso y posteriormente aplicaremos alguno de ellos al ejemplo dado. Los métodos son:

- **Método de Sustitución:** Como su nombre indica, en algún momento de la resolución debemos de "sustituir" algo, veamos el método de forma detallada paso a paso:
    1. Despejamos de alguna de las ecuaciones una de las variables.
    2. *Sustituimos* la expresión obtenida en la 2º ecuación.
    3. Resolvemos la ecuación de primer grado resultante y obtenemos el valor de una de las variables.
    4. Sustituimos el valor obtenido en la expresión del paso 1.
- **Método de Igualación:** Como su nombre indica, en algún momento de la resolución debemos de "igualar" algo, veamos el método de forma detallada paso a paso:
    1. Despejamos la misma variable en ambas ecuaciones.
    2. Igualamos las expresiones obtenidas.
    3. Resolvemos la ecuación de primer grado resultante y obtenemos el valor de una de las variables.
    4. Sustituimos el valor obtenido en alguna de las expresiones del paso 1.
- **Método de Reducción:** Este método es muy útil, cuando nos damos cuenta que al operar con las ecuaciones que tenemos una de las variables se nos anula, veámoslo:
    1. Multiplicamos por un valor adecuado alguna de las ecuaciones para que al operar con ellas se nos anule una de las variables. Sumamos las ecuaciones de modo que una de las variables se nos anula y nos resulta una ecuación de primer grado.
    2. Resolvemos la ecuación de primer grado y obtenemos el valor de una de las variables.
    3. Sustituimos en alguna de las ecuaciones el valor obtenido y obtenemos el segundo valor.

Como podemos observar en el ejemplo dado, es muy útil aplicar este último método, por lo que lo resolveremos por el método de reducción y se recomienda, resolverlo por los otros dos anteriores para comprobar que las soluciones coinciden. Resolvemos el ejemplo:

- Primero sumamos las ecuaciones luego nos queda $2x = 3$. Despejamos ahora la variable x para obtener su valor, en este caso $x = \frac{3}{2}$. Ahora despejamos en la primera ecuación por ejemplo y obtenemos la ecuación que vamos a resolver para obtener el valor de la otra variable: $\frac{3}{2} + y = 2$, al resolverla obtenemos $y = \frac{1}{2}$.

Ejercicios.

1. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales por sustitución:
   a) $\begin{cases} 5x + 3 = 20 - 9y \\ 2x - 3y = 5x - y \end{cases}$.
   b) $\begin{cases} 22x + 6y = -10 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$.
   c) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$.
2. Resuelve los sistemas del ejercicio 1 por igualación.
3. Resuelve los sistemas del ejercicio 1 por reducción.

8.- Sistemas de ecuaciones no lineales.

Definimos un sistema de ecuaciones ***no lineal***, cuando al menos alguna de las ecuaciones no es de primer grado. Por ejemplo el sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases}$. El método más sencillo para resolverlos es el método de sustitución, por lo tanto aplicaremos este método para resolver este tipo de sistemas, pero con un detalle, en este caso, despejaremos la variable de la ecuación de primer grado que nos aparezca, si es que hay alguna. Por supuesto podemos utilizar los métodos aprendidos en el caso de que nos sea de utilidad. Como podríamos deducir, al aparecer ecuaciones de segundo grado, en lugar de tener 2 soluciones, tendremos 4 posibles soluciones. Resolvamos el sistema del ejemplo por sustitución:

- Sustituimos la variable x de la ecuación de primer grado y obtenemos $x = 7 - y$. Sustituimos en la ecuación de 2º grado y obtenemos $(7 - y)^2 + y^2 = 25$. Desarrollamos y operamos resultando $2y^2 - 14y + 24 = 0$, resolvemos y obtenemos $y = 4, y = 3$, sustituimos en la expresión obtenida de despejar la ecuación de primer grado y obtenemos $x = 3, x = 4$.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:
   a) $\frac{2x}{x^2-1} = 2 + \frac{x}{x-1}$
   b) $\frac{4-x}{x^2+2x+1} - \frac{2-x}{x+1} = 2$
2. Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:
   a) $\sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$
   b) $\sqrt{x} + \sqrt{3x-2} = 2$
   c) $\sqrt{5x+1} - \sqrt{x+1} = 2$
3. Resuelve:
   a) $(9x^2-4)(2x-3)^2$
   b) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$
4. Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:
   a) $6x^4 - 4x^2 - 2 = 0.$
   b) $x^6 - 2x^3 + 1 = 0.$
5. Resuelve los siguientes sistemas lineales por los tres métodos estudiados:
   a) $\begin{cases} x + y = 2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{-2}{3}. \end{cases}$
   b) $\begin{cases} 2x + 3y = -12 \\ 8x - 9y = 6 \end{cases}$
6. Resuelve los siguientes sistemas no lineales:
   a) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x - y = -3 \end{cases}$
   b) $\begin{cases} xy - y^2 = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$
   c) $\begin{cases} xy + 2y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$
   d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x^2 - y^2 = 9 \end{cases}$
   e) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 35 \\ x^2 - 2y^2 = 1 \end{cases}$
   f) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + x + 1 = 0 \\ x^2 - 2y^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases}$
   g) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ \frac{x}{2y} + 1 = 3 \end{cases}$
7. Una empresa de alquiler de coches cobra por día y por kilómetros recorridos. Un cliente pagó 160€ por 3 días y 400 km, y otro 175€ por 5 días y 300 km. Averigua cuánto cobran por día y por kilómetros.
8. Un inversor compra dos cuadros por 2650€. Al cabo de dos años los vende por 3124€ ganando en uno de ellos un 20% más y en el otro un 15% más. ¿Cuánto le costó cada cuadro?.
9. Un comerciante compra dos motocicletas por 3000€ y las vende por 3300€. Calcula cuánto pagó por cada una si en la venta de la primera ganó un 25% más y perdió un 10% de la segunda.

10. Halla las dimensiones de un rectángulo de perímetro 34 cm y área 60 cm^2.
11. Un comerciante quiere vender por 60000€ unos ordenadores. Se le estropean dos y quiere vender los restantes por 50€ más. ¿Cuántos ordenadores tenía y a que precio los vendió.?