

Tema 4: Inecuaciones.

Dedicamos un pequeño tema a tratar este tipo de "ecuaciones" que denominamos *inecuaciones* y que son desigualdades, al contrario que las ecuaciones, en las que se emplean símbolos ya estudiados en el primer tema como $<$, $>$, \leq y \geq . Terminaremos al igual que el tema anterior, estudiando sistemas de inecuaciones.

1.- Inecuaciones de primer grado.

La resolución de inecuaciones se hace exactamente igual que las ecuaciones, solo que tenemos que tener en cuenta que no es una igualdad. Es decir para resolver la inecuación $-2x - 2 < 4$, dejamos en un miembro las incógnitas y en otro los valores independientes y operamos resultando $-2x < 6$. Ahora para despejar la variable, debemos de tener en cuenta el signo del coeficiente que la acompaña, ya que si es negativo (lo cual ocurre en este caso), la desigualdad cambia quedando de esta forma: $x > -3$. Finalmente representamos ese intervalo y esos son todos los valores que satisfacen la inecuación. (No haremos la representación, ya que deberíais saber hacerla de los temas anteriores). Debemos de tener en cuenta, que podemos sumarle y restarle a una inecuación un mismo número y esta no cambia, al igual que si multiplicamos ambos miembros por un mismo valor positivo. Por supuesto, se pueden complicar tanto como queramos.

2.- Inecuaciones de segundo grado.

Resolver este tipo de inecuaciones, es un poco distinto al anterior método incluso distinto a resolver una ecuación de segundo grado, debido a que no solo existe un valor que verifique la inecuación sino un conjunto de valores, los cuales pertenecerán a uno o varios intervalos. Veamos la resolución de estas inecuaciones con un ejemplo: Tomamos la inecuación $x^2 - 6x + 8 > 0$. Consideramos la desigualdad como una igualdad y obtenemos los 2 valores de resolver la ecuación de segundo grado. Posteriormente representamos ambos valores, que en este caso son 2 y 4, en la recta real de modo que nos resultan varios intervalos $(-\infty, 2) \cup (2, 4) \cup (4, +\infty)$. Tomamos de cada intervalo un valor y evaluamos la desigualdad, en este caso tomaremos los valores 0,3,5, cada uno perteneciente a cada intervalo y evaluamos resultando $P(0) = 8 > 0$, $P(3) = -1 < 0$, $P(5) = 3 > 0$, lo cual implica que los intervalos que son solución son el primero y el último. Finalmente representamos los intervalos solución.

Hay inecuaciones de segundo grado cuyo intervalo solución es toda la recta real, en cuyo caso escribimos \mathbb{R} , o bien no tiene solución, en cuyo caso escribimos \emptyset , el cual es el símbolo del conjunto que denominamos vacío.

3.- Inecuaciones racionales.

Las **inecuaciones racionales** tienen una forma parecida a las ecuaciones racionales, solo que en lugar de una igualdad es desigualdad y se resuelven de forma similar a las de segundo grado, solo hay que tener en cuenta que el denominador no puede ser cero. Por ejemplo tomamos $\frac{x+3}{x-2} \leq 2$. Veamos la resolución de este ejemplo:

1. Pasamos el segundo miembro al primero resultando: $\frac{x+3}{x-2} - 2 \leq 0$
2. Ponemos como una única fracción, para ello obtenemos el mismo denominador y operamos resultando $\frac{7-x}{x-2} \leq 0$
3. Obtenemos las raíces de ambos polinomios (Numerador y denominador) resultando $x = 7$ y $x = 2$, y representamos ambos valores.
4. Ahora hacemos como en las inecuaciones de segundo grado, tomamos un valor de cada intervalo y nos quedamos con los intervalos que cumplan que al evaluar el polinomio en ese valor, este tiene el mismo signo que la inecuación, de este modo resulta que el intervalo solución es $(-\infty, 2) \cup [7, +\infty)$. Finalmente representamos.

Ejercicios.

1. Resuelve las siguientes inecuaciones y di de que grado son:
 - a) $2x - 8 + 3x - 16 < 5x + 3 - 12x$
 - b) $2x \geq \frac{5}{4}x - \left(\frac{x}{2}\right)^2$
 - c) $4x - 8x + 9x - 10x - 2 + 5x - 3 + 9 \leq 180x$
 - d) $2x(3 - x) \leq 0$
 - e) $(x + 2)(x - 3) > 0$
 - f) $3x - 6x - 3x + 1 < 16x$
 - g) $\frac{x+12}{x-4} - 8 \leq 0$
 - h) $\frac{16-x}{(x-4) \cdot 2+8} \leq -5$

4.- Sistemas de inecuaciones con una incógnita.

Este tipo de sistemas son muy fáciles de resolver, ya que consiste en resolver por separado las inecuaciones de primer grado que aparecen, de modo que obtendremos dos intervalos (uno por cada inecuación) y finalmente la solución del sistema será el intervalo común a

ambas inecuaciones, por ejemplo en el sistema $\begin{cases} 2x + 3 \geq 1 \\ 2 - x \geq -1 \end{cases}$, resolvemos ambas inecuaciones resultando $x \geq -1$ y $x \leq 2$, por lo tanto al representar obtenemos:



Luego el intervalo solución es $[-1, 2]$.

Ejercicios Propuestos.

1. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer y segundo grado:

a) $\frac{5x-16}{6} + \frac{x+8}{12} < \frac{x+1}{3}$

b) $\frac{2-x}{4} - \frac{2+x}{2} \geq \frac{2x+7}{4} - \frac{2x+5}{3}$

c) $(x+1)^2 - (x+1) + 12 \geq 0$

d) $2(x-11) - 3x \cdot (-3x+1)^2 < (3x+2)^2$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones racionales:

a) $\frac{(x+2)+(x-4)}{x-4} - 4 \leq 0$

b) $\frac{(3-x)+(2x-3)}{x-2} > 12$

3. Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones con una incógnita:

a) $\begin{cases} \frac{2-x}{4} < 2 \\ x+1 \leq 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+12x-3 \geq 9x-2 \\ x > 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x+2}{4} + \frac{2x+2}{3} \geq 1 \\ 16x+13 \leq 19 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \frac{18x+2}{8} + \frac{3x+2}{2} \geq 0 \\ x+1 \leq 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x-2 \geq 1 \\ 3x-2 > 12 \end{cases}$

4. El producto de un número entero por otro, dos unidades mayor, es menor que 8. Obtener el posible valor del número entero.

5. El producto de un número entero por otro, tres veces mayor, es menor que 27. Obtener el posible valor del número entero.

6. Un grupo de amigos reúnen 50 € para ir a una fiesta. Si la entrada cuesta 6 €, les sobra dinero, pero si vale 7 € les falta. ¿Cuántos amigos son?

7. ¿Cuántos kilos de pintura de 3 € debemos de mezclar con 5 Kg de otra que cuesta 6 € para que el precio sea inferior o igual a 9 €, ¿Y si fuese superior a 13 €?
-