

# Tema 5: Semejanza.

En este tema nos dedicaremos al estudio de los *triángulos* y *polígonos*, y dedicaremos un apartado a un famoso teorema, que nos será de utilidad para entender la semejanza entre ellos: El *Teorema de Thales*. Finalmente, estudiaremos el *teorema del cateto y de la altura*.

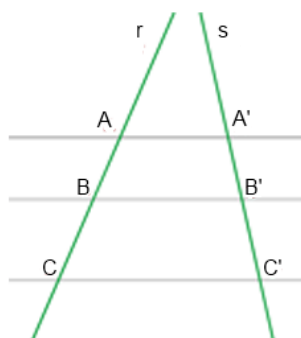
## 1.- Introducción: Concepto de Escala y Teorema de Pitágoras.

Antes de comenzar el tema, debemos de tener claro y conocer, algunos de los resultados y conceptos básicos. El primero concepto es el de **escala**. La escala es una medida de proporción que nos sirve para comparar tamaños y ajustarlos a la realidad, por ejemplo, cuando hablamos que un plano en un papel está a escala 3:4, nos referimos a que por cada 3 cm en el papel, en realidad hay 4 cm en la realidad. El segundo concepto, en este caso resultado, que debemos conocer es el *Teorema de Pitágoras*, el cual nos dice que dado un triángulo rectángulo, el valor de la hipotenusa al cuadrado es igual al valor de la suma de los catetos al cuadrado, es decir:  $h^2 = c^2 + c^2$ . El último concepto que vamos a repasar es el concepto de **semejanza**. Diremos que dos "objetos" son semejantes, cuando son proporcionales, es decir, cuando tienen un parecido entre sus dimensiones. Por ejemplo, dos triángulos, tal que uno de ellos este dentro del otro son semejantes, ya que existe una relación (proporción) entre ellos.

Una vez refrescado estos conceptos, nos disponemos a entrar de lleno en el tema y a resolver nuestros primero ejercicios.

## 2.- Teorema de Thales 1: Rectas.

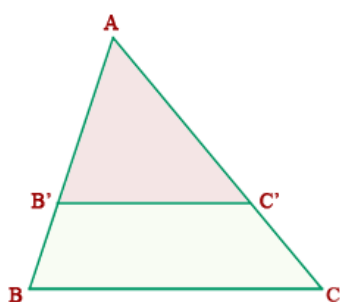
El *Teorema de Thales para rectas*, nos dice: Dadas dos rectas cualesquiera  $r$  y  $s$ , que se puedan cortar por rectas paralelas, los segmentos determinados en una de las rectas son proporcionales a los determinados en la otra. Matemáticamente escrito y fijándonos en el siguiente esquema quedaría así:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

### 3.- Teorema de Thales 2: Triángulo.

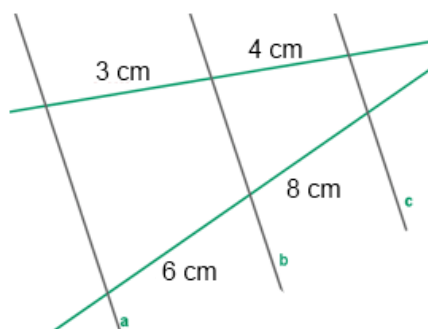
Del mismo modo que para rectas, la formulación del teorema es prácticamente similar. El **Teorema de Thales para un triángulo** nos dice: Dado un triángulo  $ABC$ , de vértices  $A, B, C$  respectivamente, si se traza un segmento paralelo a uno de los lados, se obtiene otro triángulo  $AB'C'$ , de vértices  $A, B', C'$  respectivamente, cuyos lados son proporcionales a los del triángulo original. Matemáticamente escrito y fijándonos en el siguiente esquema quedaría así:



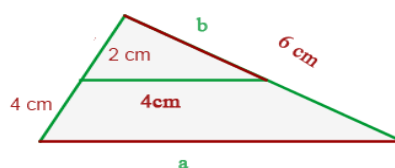
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}}$$

#### Ejercicios.

1. Dada dos rectas  $r$  y  $s$ , trazamos 3 rectas paralelas entre ellas, de modo que nos resultan varios segmentos de 10, 4 y 14 cm respectivamente. Hallar la longitud de los tres segmentos restantes.
2. Dado el siguiente esquema, ¿Podemos asegurar que la recta  $c$  es paralela?. ¿Por qué?. Demuéstralo.

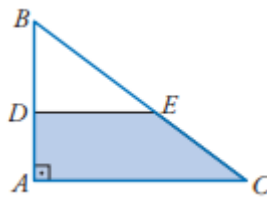


3. Dado un triángulo de lados  $AB = 5 \text{ cm}$ ,  $BC = 10 \text{ cm}$ , queremos conocer la longitud del lado  $AC$ , sabiendo que hemos trazado un segmento de longitud 6 cm dentro del triángulo.
4. Dado el triángulo del siguiente esquema:



obtener los datos que faltan y hallar su área y su perímetro.

- Una fotografía de  $9 \times 6$  cm, tiene alrededor un marco de  $14 \times 11$  cm. ¿Son semejantes?
- En un mapa, cuya escala es  $1:1500000$ , la distancia entre dos ciudades es de 2,5 cm. Calcular la distancia real entre ellas. ¿Cuál sería la distancia en el mapa de dos ciudades A y B que realmente distan 360 km?
- En un triángulo rectángulo, los catetos miden 3 y 4 cm respectivamente. Halla el perímetro de otro triángulo semejante sabiendo que uno de sus catetos mide 54 cm.
- Dado el siguiente triángulo:



Sabiendo que  $AB = 21$  cm,  $AC = 28$  cm,  $AD = 9$  cm. Hallar el área y el perímetro del trapecio ADEC y del triángulo ABC.

#### 4.- Semejanza de Triángulos. Criterios de Semejanza.

Principalmente, definimos como **lados homólogos** de dos triángulos si cada lado de uno de los triángulos se corresponde con cada lado del otro triángulo. De forma equivalente se define los **ángulos homólogos**. Si nos fijamos en el siguiente esquema lo entenderemos mejor:



Los lados a y a', b y b', c y c' son homólogos. Los ángulos A y A', B y B', C y C' son homólogos.

Una vez dado estos conceptos, nos disponemos a efectuar la definición principal de **triángulos semejantes**. Dos triángulos son semejantes cuando tienen sus ángulos homólogos iguales y sus lados homólogos proporcionales, esto es de forma matemática:

- $A = A', B = B', C = C'$
- $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$

La razón (valor) de proporción entre los lados de un triángulo se le denomina **razón de semejanza**. De aquí obtenemos dos propiedades:

1. La razón de los perímetros de triángulos semejantes es igual a su razón de semejanza, es decir:

$$\frac{\text{Perímetro de } ABC}{\text{Perímetro de } A'B'C'} = \frac{a + b + c}{a' + b' + c'} = \text{Razón}$$

2. La razón de las áreas de los triángulos semejantes es igual al cuadrado de su razón de semejanza, es decir:

$$\frac{\text{Area } ABC}{\text{Area } A'B'C'} = \frac{S}{S'} = \text{Razón}^2$$

Una vez, estudiado los principales conceptos, pasamos a dar una serie de criterios para determinar la semejanza de triángulos no rectángulos:

- **Criterio 1:** Dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos iguales.
- **Criterio 2:** Dos triángulos son semejantes si tienen los lados proporcionales.
- **Criterio 3:** Dos triángulos son semejantes si tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre ellos igual.

Veamos un pequeño ejercicio: Dados dos triángulos de lados  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 12 \text{ cm}$ ,  $c = 15 \text{ cm}$ ,  $a' = 15 \text{ cm}$ ,  $b' = 18 \text{ cm}$  y  $c' = 22,5 \text{ cm}$ . Comprobar si son semejantes.

Para ello basta con hacer  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ , resultando:  $\frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{15}{22,5}$ , luego  $10 \cdot 18 = 12 \cdot 15$ , entonces  $180 = 180$  y  $12 \cdot 22,5 = 18 \cdot 15$ , entonces  $270 = 270$ . Luego por el criterio 2, son semejantes por tener los lados proporcionales.

Ya que hemos visto los criterios de semejanza para triángulos no rectángulos, nos deberíamos de haber preguntado, ¿Y para triángulos rectángulos?. Pues bien, para los triángulos rectángulos también existen tres criterios de semejanza que son los que vamos a ver a continuación:

- **Criterio I:** Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo <sup>(1)</sup> igual.

- **Criterio II:** Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen los dos catetos proporcionales.
- **Criterio III:** Dos triángulos son semejantes si tienen proporcionales la hipotenusa y un cateto.

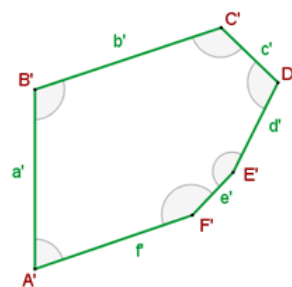
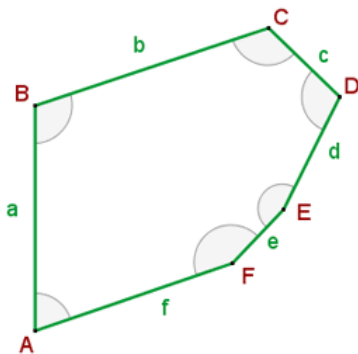
<sup>(1)</sup> Recordemos que un ángulo es agudo cuando mide menos de 90 grados.

## Ejercicios.

1. Calcular la altura de un edificio que proyecta una sombra de 6,5 m a la misma hora que un poste de 4,5 m da una sombra de 0,9 m.
2. Los catetos de un triángulo miden 24 y 10 cm. ¿Cuánto medirán los de otro semejante cuya hipotenusa vale 52 cm? .
3. Da un ejemplo de aplicación del criterio 1 y 3 de semejanza de triángulos no rectángulos.
4. Da un ejemplo de aplicación del criterio I,II y III de semejanza de triángulos rectángulos.

## 5.- Semejanza de Polígonos.

Al igual que para triángulos la definición es prácticamente similar. Dos **polígonos** son **semejantes**, cuando tienen los ángulos homólogos iguales y los lados homólogos proporcionales.

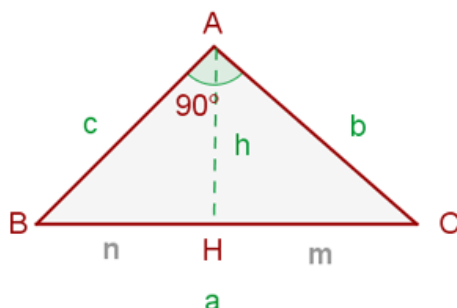


$$A = A', B = B', C = C', D = D', E = E', F = F'$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = \frac{f}{f'}$$

## 6.- Teorema del cateto y de la altura .

Pasemos a enunciar el **teorema del cateto**: en todo triángulo, un cateto es *media proporcional*<sup>(2)</sup> entre la hipotenusa y su proyección sobre ella. Lo veremos un poco más claro con este esquema:



$$\begin{aligned} \bullet \quad \frac{a}{b} &= \frac{b}{m} \rightarrow b^2 = a \cdot m \\ \bullet \quad \frac{a}{c} &= \frac{c}{n} \rightarrow c^2 = a \cdot n \end{aligned}$$

Donde "a" es la hipotenusa, "c, b" catetos y "m, n" las proyecciones de estos sobre la hipotenusa.

Basándonos en el esquema anterior, el **teorema de la altura** nos dice: en todo triángulo, la altura relativa a la hipotenusa es *media proporcional* entre los dos segmentos que dividen a esta.

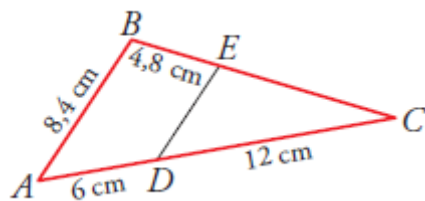
$$\frac{m}{h} = \frac{h}{n} \rightarrow h^2 = n \cdot m$$

Donde "h" es la altura en el esquema anterior.

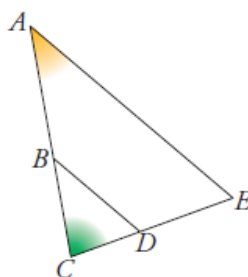
<sup>(2)</sup> La media proporcional se haya mediante la relación  $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ , donde  $x$  son los valores medios extremos y  $a, b$  valores numéricos, resultando:  $x^2 = a \cdot b$ .

### Ejercicios Propuestos.

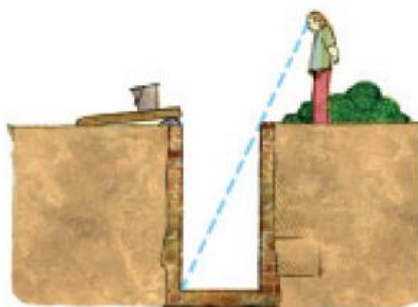
- Una maqueta está hecha a escala 1:250. Calcular:
  - Las dimensiones de una torre cilíndrica que en la maqueta mide 6 cm de altura y 4 de diámetro.
  - La superficie de un jardín que en la maqueta ocupa 40 cm<sup>2</sup>.
  - El volumen de una piscina que en la maqueta contiene 20 cm<sup>3</sup>.
- El perímetro de un triángulo isósceles es 49 m y su base mide 21 m. Halla el perímetro de otro triángulo semejante, cuya base mide 4 m. ¿Cuál es la razón de semejanza entre los triángulos?
- En la siguiente figura, el segmento  $\overline{DE}$  es paralelo a  $\overline{AB}$ . Justifica que los triángulos ABC y CDE son semejantes y calcula la longitud de  $\overline{DE}$  y  $\overline{EC}$ :



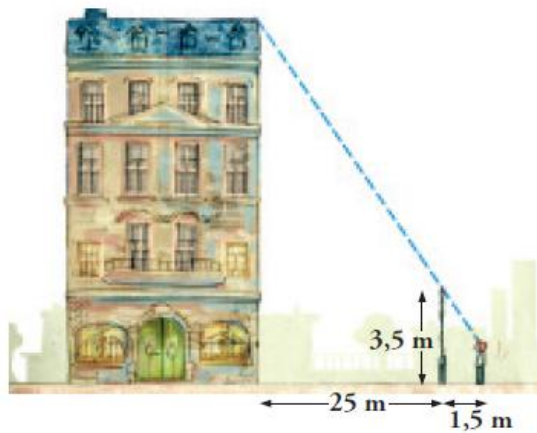
4. La razón de semejanza entre dos triángulos es  $\frac{2}{5}$ . Si el área del mayor es  $150 \text{ cm}^2$ , calcula el área del menor.
5. En el siguiente esquema, si  $\overline{BD}$  es paralelo a  $\overline{AE}$  y  $\overline{AC} = 15 \text{ cm}$ ,  $\overline{CE} = 11 \text{ cm}$ ,  $\overline{BC} = 6,4 \text{ cm}$ . Calcular:
  - a)  $\overline{CD}$ ,  $\overline{BD}$  y  $\overline{AE}$ .
  - b) Si  $\hat{A} = 37^\circ$  y  $\hat{C} = 80^\circ$ , calcular  $\hat{E}$ ,  $\hat{B}$ ,  $\hat{D}$ .



6. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 30 cm y la proyección de un cateto sobre ella 18 cm. Calcular el valor de los catetos, las proyecciones y la altura.
7. Dibuja en cada caso un triángulo rectángulo y traza su altura sobre la hipotenusa:
  - a) Calcula la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa si esta mide 50 cm y el cateto mayor 40 cm.
  - b) La hipotenusa mide 25 cm y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa 9 cm. Halla el cateto mayor.
  - c) La altura relativa a la hipotenusa mide 6 cm, y la proyección del cateto menor sobre la hipotenusa 4,5 cm. Halla la hipotenusa.
8. ¿Cuál es la profundidad de un pozo si su anchura es de 1,2 m y alejándote 0,8 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?



9. Para medir la altura de la casa, un chico de 165 cm de altura, se situó a 1,5 m de la verja y tomó las medidas indicadas en el esquema. ¿Cuánto mide la casa?



10. Entre dos pueblos, A y B, hay una colina. Entre ellos tomamos un punto P y fijamos las medidas  $AP = 15 \text{ km}$ ,  $PM = 72 \text{ km}$ ,  $MN = 12 \text{ km}$ . Halla la distancia AB.

