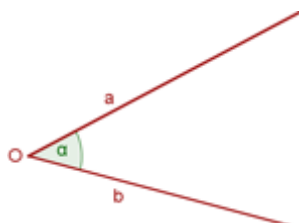


Tema 6: Trigonometría.

Comenzamos un tema, para mi parecer, muy bonito, en el que estudiaremos algunos aspectos importantes de la geometría, como son los **ángulos**, las principales **razones e identidades trigonométricas** y algunas aplicaciones de estas.

1.- Introducción: Ángulos.

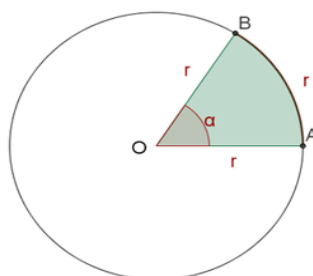
De años anteriores, la idea básica de ángulo es la de un arco de circunferencia asociado a un valor, ahora bien, pasemos de esta definición intuitiva a la definición formal de ángulo: definimos un **ángulo**, como la región del plano comprendida por dos semirrectas, esto es:



En este caso, el ángulo es α y las semirrectas "a, b".

Diremos que el ángulo es positivo si "se desplaza en sentido de las agujas del reloj", y negativo, en caso contrario. Para medir ángulos existen dos tipos de unidades o medidas: **Grados y Radianes**:

1. **Medidas de ángulos en grados sexagesimales:** Si dividimos una circunferencia goniométrica ⁽¹⁾ en 360 partes iguales, el ángulo central correspondiente a cada una de sus partes es un ángulo de un grado y se denota por (1°) . A su vez, un grado se puede descomponer en minutos y segundos, ya que un grado es equivalente a 60 minutos ($'$) y un minuto tiene 60 segundos ($''$).
2. **Medidas de ángulos en radianes:** Intuitivamente, definimos un radián como la medida de un ángulo cuyo arco mide un radio. Ahora pensemos un poco, cuando damos una vuelta completa a la circunferencia, recorreremos 360 grados, luego si recorreremos la mitad, recorreremos 180 grados. Asociamos a 180 grados, un número muy conocido, el famoso número π , de modo que $180^\circ = \pi$ radianes. Por lo tanto, como 360 grados es 2 veces 180 grados, asociamos a 360 grados el valor 2π radianes.



Para pasar de grados a radianes, basta con hacer una regla de tres, es decir, si queremos saber cuantos radianes equivalen a 30° hacemos lo siguiente:

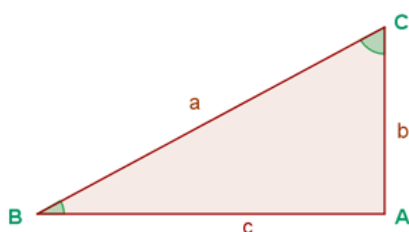
Si $180^\circ = \pi \text{ rad}$, $30^\circ = x$, luego $\frac{30}{180} \pi = x$, simplificando resulta que $30^\circ = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$.

Finalmente, un ángulo puede ser expresado como el producto de un número entero de vueltas por un ángulo de la circunferencia goniométrica, es decir, puede ser expresado de la forma $\alpha = k \cdot \beta + r$, donde k es el número de vueltas, β el ángulo representado en la circunferencia goniométrica y r , el resto, que vendrá expresado en forma sexagesimal. De este modo, para expresar un ángulo de esa forma deberemos dividir dicho ángulo α entre 360° y obtendremos la expresión de la forma anterior.

⁽¹⁾ Circunferencia centrada en el origen de coordenadas y de radio 1.

2.- Razones trigonométricas.

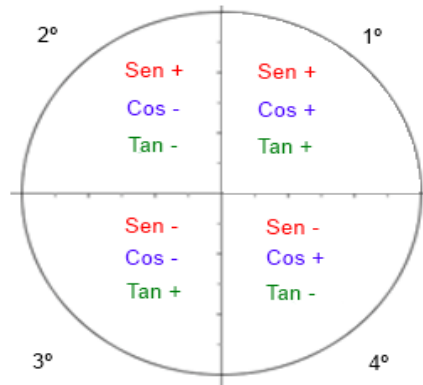
Veamos un caso particular para las **razones trigonométricas**, para ellos, las vamos a analizar en un triángulo rectángulo como es el siguiente:



Las principales razones trigonométricas definidas sobre el ángulo B del triángulo rectángulo anterior son:

- **Seno:** Definimos el seno de B y lo denotamos por $Sen(B) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$.
- **Coseno:** Definimos el coseno de B y lo denotamos por $Cos(B) = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$.
- **Tangente:** Definimos la tangente de B y lo denotamos por $Tan(B) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{b}{c}$.

En la circunferencia goniométrica, los ejes de coordenadas delimitan cuatro cuadrantes, que se enumeran en sentido contrario a las agujas del reloj. Identificamos el Seno con el eje de ordenadas (eje Y) y el Coseno con el eje de coordenadas o abscisas (eje X), de modo que en cada cuadrante, los signos de las razones trigonométricas varían como podemos apreciar en el siguiente esquema:



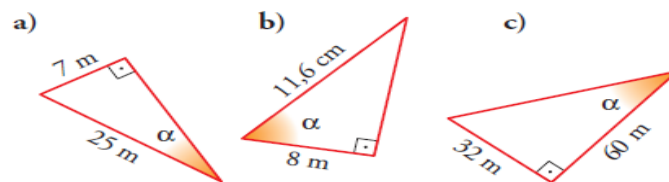
Definimos los **ángulos notables**, como aquellos ángulos más conocidos o más utilizados en la trigonometría, estos son: $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ y 90° . Recogemos sus principales razones trigonométricas en la siguiente tabla:

Ángulos / Razones	0°	30°	45°	60°	90°
Seno	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Coseno	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Dada una razón trigonométrica de un ángulo desconocido, podemos hallar el valor de dicho ángulo, aplicándole la función inversa a dicha razón trigonométrica. Para ello nos hará falta el uso de la calculadora utilizando la tecla *Shift* y la tecla de la razón trigonométrica.

Ejercicios.

- Expresar de forma sexagesimal los siguientes ángulos dados en grados:
 - 1280°
 - $355,298^\circ$
 - 3756°
- Expresar en radianes los siguientes ángulos dados en grados:
 - 355°
 - 270°
 - Ángulos notables.
- Halla las razones trigonométricas del ángulo α en cada uno de los siguientes triángulos:



4. Calcular el valor del ángulo a , expresado de forma sexagesimal, sabiendo las siguientes razones trigonométricas. Indicar en que cuadrante está el ángulo correspondiente:

- a) $Sen(a) = 0,87$
- b) $Cos(a) = -0,25$
- c) $Tan(a) = 0,3$
- d) $Sen(a) = -0,27$
- e) $Cos(a) = 0,55$

3.- Identidades trigonométricas fundamentales.

A pesar de haber varias, en este curso solo veremos dos de ellas, las cuales son muy fáciles de demostrar, y su demostración quedará propuesta como ejercicio para el lector en el siguiente apartado de ejercicios. Estas son:

- $Tan(a) = \frac{Sen(a)}{Cos(a)}$
- $Sen(a)^2 + Cos(a)^2 = 1$

Para los ejercicios que vamos a realizar, el uso de estas dos identidades trigonométricas son fundamentales veamos un ejemplo:

➤ Sabiendo que $Sen(a) = 0,25$, y que a pertenece al primer cuadrante, calcular $Cos(a)$:

Aplicando la 2º identidad tenemos lo siguiente $0,25^2 + Cos(a)^2 = 1$, despejando obtenemos que $Cos(a) = \pm\sqrt{1 - 0,0625}$. Como el ángulo pertenece al primer cuadrante, el coseno es positivo luego $Cos(a) = +\sqrt{0,9375} \approx 0,9682$.

Ejercicios.

1. Calcular las razones trigonométricas restantes y los posibles valores del ángulo a , indicando el cuadrante al que puede pertenecer en cada caso, sabiendo:
 - a) $Sen(a) = 0,252$
 - b) $Cos(a) = -0,5$
 - c) $Tan(a) = 1$

d) $Tan(a) = \frac{1}{2}$

e) $Sen(a) = -0,375$

f) $Cos(a) = 0,75$

2. Demostrar las identidades trigonométricas fundamentales. [Pista: Sería muy útil utilizar un triángulo rectángulo, indicando el nombre de cada lado y aplicando razones trigonométricas y el teorema de pitágoras.]

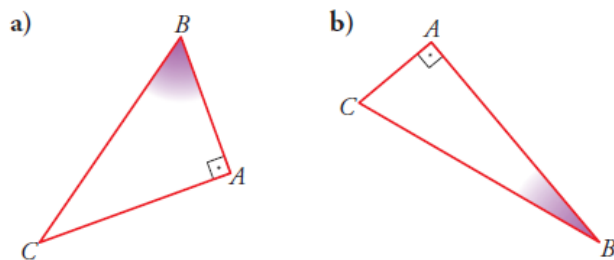
4.- Resolución de triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo no es más que hallar sus lados, ángulos, área y perímetro. Normalmente no conoceremos algún dato, ya que si no el problema estaría resuelto. Para ello utilizaremos lo estudiado en los apartados anteriores y tendremos en cuenta, que en un triángulo, la suma de todos sus ángulos es de 180° . Un caso particular, en el cual deberemos convertir nuestro problema siempre, es el de la resolución de triángulos rectángulos, ya que estos nos incorporan un dato adicional que nos será de mucha utilidad siempre, ya que contiene un ángulo de 90° , por lo que ya conocemos un dato. Hay que tener en cuenta que no todos los triángulos son rectángulos y que por lo tanto, deberemos "transformar" el triángulo del problema en varios triángulos rectángulos. Veamos un ejemplo de resolución:

- Dado el triángulo de la sección (apartado) 2, y sabiendo que es un triángulo rectángulo (por lo tanto $\hat{A} = 90^\circ$) y que el lado $a = 415 \text{ m}$ y $b = 280 \text{ m}$. Calcular los ángulos restantes y el lado c .
- Pues bien, como conocemos a y b , podemos conocer el valor del ángulo \hat{B} aplicando la razón del seno, de modo que $Sen(B) = \frac{280}{415} = 0.6747$, luego tomando la inversa del seno conocemos el valor del ángulo $\hat{B} = Sen(0.6747)^{-1} = 42^\circ 25'$. Ahora, como conocemos \hat{A} y \hat{B} , tenemos que $\hat{C} = 180 - \hat{A} - \hat{B} = 180 - 90 - 42^\circ 25' = 47^\circ 35'$. Ya solo nos falta conocer el valor del lado c , para ello, aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $415^2 = 280^2 + c^2$, luego despejando tenemos que $c = \pm\sqrt{93825} = 306.308 \text{ m}$, tomamos la raíz positiva ya que es una longitud y las longitudes siempre son positivas.

Ejercicios Propuestos.

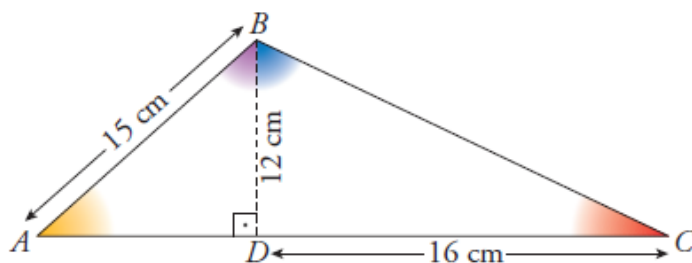
1. Midiendo los lados, halla las razones trigonométricas de \hat{B} en cada caso:



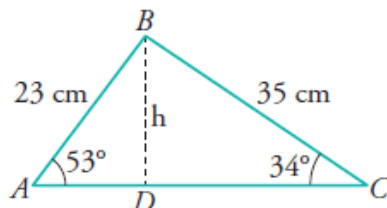
2. Halla las razones trigonométricas de los ángulos de los siguientes triángulos rectángulos:

- a) $b = 56 \text{ cm}$, $a = 62,3 \text{ cm}$
- b) $c = 16 \text{ cm}$, $a = 36 \text{ cm}$
- c) $b = 33,6 \text{ cm}$, $c = 4,5 \text{ cm}$

3. Calcula las razones trigonométricas de los ángulos del siguiente triángulo:



- 4. Si $\text{Sen}(a) = 0.28$, calcular las razones trigonométricas restantes, con $a \in I$
- 5. Si $\text{Tan}(a) = \sqrt{5}$, calcular las razones trigonométricas restantes, con $a \in I$
- 6. Resolver los triángulos rectángulos del ejercicio 2.
- 7. Resolver los triángulos rectángulos ($\hat{A} = 90^\circ$) conociendo los siguientes datos:
 - a) $b = 7 \text{ cm}$, $c = 18 \text{ cm}$
 - b) $b = 18 \text{ cm}$, $\hat{B} = 40^\circ$
 - c) $b = 25 \text{ cm}$, $\hat{B} = 36^\circ$
 - d) $c = 12.7 \text{ cm}$, $\hat{B} = 65^\circ$
- 8. Cuando los rayos del sol forman 40° con el suelo, la sombra de un árbol mide 18 cm. ¿Cuál es la altura del árbol?
- 9. Una escalera de 3 m está apoyada sobre una pared, ¿Qué ángulo forma la escalera con el suelo si su base está a 1,2 m de la pared?
- 10. De un triángulo isósceles conocemos su lado desigual que vale 18 cm y su altura que es 10 m. Calcular sus ángulos, lados, área y perímetro.
- 11. Hallar la longitud del lado AC y el área del siguiente triángulo:



12. Sitúa en la circunferencia goniométrica los siguientes ángulos, e indica el signo y valor de sus razones trigonométricas:

- a) 128°
- b) 87°
- c) 285°
- d) 4627°
- e) 198°
- f) 98°
- g) 405°
- h) 305°
- i) 1028°

13. Dibuja dos ángulos cuyo seno sea 0,40 y halla su coseno.

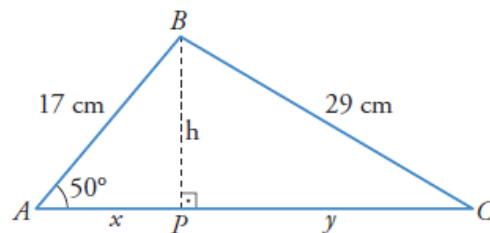
14. Dibuja dos ángulos cuyo coseno sea - 0.40 y halla su seno y tangente.

15. Sabiendo que la $Tan(a) = -2$ y que $a < 180^\circ$, hallar su seno y su coseno.

16. En una ruta de montaña, una señal indica una altitud de 785 m. Tres kilómetros más adelante, la altitud es de 1265 m. Halla la pendiente media de esa ruta y el ángulo que forma con la horizontal.

17. Los brazos de un compás, que miden 12 cm, forman un ángulo de 50 grados. Calcular la longitud del radio de la circunferencia que se puede trazar con esa abertura.

18. En el siguiente triángulo hallar los datos que faltan:



19. Desde el lugar donde me encuentro, la visual de la torre forma un ángulo de 32° con la horizontal. Si me acerco 25 m, el ángulo es de 50° . ¿Cuál es la altura de la torre?.

20. Hallar la longitud del edificio (\overline{PQ}) y la del acantilado (\overline{QR}) en la siguiente figura:

