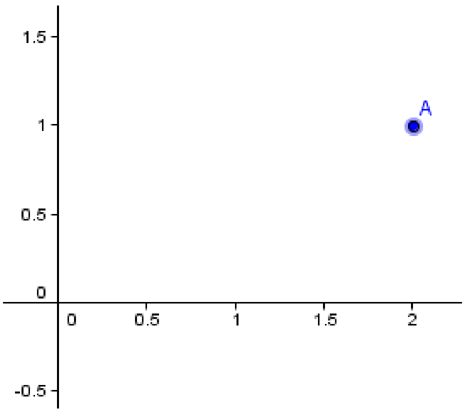
Tema 7: Geometría Analítica. Rectas.

En este tema nos centraremos en estudiar la ***geometría en el plano***, así como los elementos que en este aparecen como son los ***puntos, segmentos, vectores*** y ***rectas***. Estudiaremos principalmente como sacar la ***ecuación de una recta*** y veremos ligeramente la ecuación de una circunferencia. Posteriormente veremos las ***posiciones relativas entre rectas*** y finalizaremos el tema con un ligero conocimiento sobre los ***recintos*** y las inecuaciones que los delimitan.

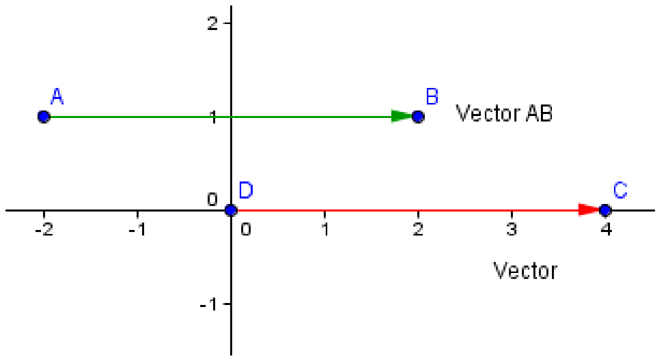
1.- Puntos, segmentos y vectores.

Un ***punto*** en el plano, no es más que un par de valores, que representamos por (x, y), donde x es el valor en el eje de abcisas o eje de coordenadas e y el valor en el eje de ordenadas. Por ejemplo para representar el punto $A = (2,1)$, el valor en el eje de coordenadas será 2 y en el eje de ordenadas será 1, gráficamente será:



Ahora bien, dados dos puntos P y Q, podemos unirlos, dando lugar a un ***segmento*** que representaremos, igual que en el tema anterior por $\overline{PQ}$. Si a ese segmento le damos una dirección entonces obtenemos lo que denominamos por ***vector*** y que representaremos por $\overrightarrow{PQ}$. Para representarlo geométricamente, basta con representar los puntos y unirlos mediante una flecha y para saber las coordenadas del vector, lo que hacemos es restar las coordenadas de los puntos, obteniendo un vector con origen el origen de coordenadas y final sus coordenadas.

Por ejemplo para representar el vector determinado por $A = (-2,1)$ y $B = (2,1)$, calculamos sus coordenadas que serian $\overrightarrow{AB} = (2 - (-2), 1 - 1) = (4,0)$. Luego representaríamos el vector determinado por los dos puntos y el vector con origen el punto $(0,0)$ y extremo $(4,0)$:



Definimos el ***módulo*** de un vector, como la longitud del segmento que lo define y que se define como $|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. En el caso anterior el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ sería $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$.

La distancia entre dos puntos es igual al módulo del vector que tiene como extremos los puntos.

Definimos el ***punto medio de un segmento*** determinado por dos puntos $A = (x, y), B = (a, b)$ como $M = (\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2})$.

Diremos que tres puntos $A = (x, y), B = (a, b), C = (c, d)$ están alineados, cuando los vectores que los determinan tienen la misma dirección, lo cual ocurre porque las coordenadas son proporcionales, es decir, se cumple que:

$$\boxed{\frac{a-x}{c-a} = \frac{b-y}{d-b}}$$

Definimos el ***punto simétrico*** de un punto dado, como aquel que está a la misma distancia del punto medio del segmento generado por ambos puntos, es decir, si $A = (x, y)$ y el punto medio del segmento $\overline{AA'}$ tiene por coordenadas $M = (\frac{x+a}{2}, \frac{y+b}{2})$, entonces el punto simétrico se obtiene igualando las coordenadas del punto medio. Por ejemplo, para hallar el simétrico de (1,0) con respecto al punto (2,1) hacemos lo siguiente:

$$\left(\frac{1+a}{2}, \frac{0+b}{2}\right) = (2,1)$$

Igualamos cada coordenada y despejamos obteniendo las coordenadas (a, b) del punto simétrico que en este caso son $(3,2)$.

Ejercicios.

1. Si los puntos $(-6,2), (-2,6), (2,2)$ son vértices de un cuadrado. ¿Cuáles son las coordenadas del cuarto punto?

2. Representa los puntos $A=(3,1), B=(-5,3), C=(1,2), D=(-1,-2), E=(-2,-3), F=(5,0)$ y halla las coordenadas de los puntos medios de los segmentos entre A y B, C y D, E y F.
3. Calcula las coordenadas de los vectores obtenidos de combinar los puntos del ejercicio 2. Hallar el módulo de cada uno.
4. Hallar las coordenadas del punto simétrico de (-5,3) con respecto a:
    a) (2,0)
    b) (5,-2)
    c) (0,0)
    d) (3,-1)
5. Comprueba que los puntos $A=(1,0), B=(-3,-2), C=(5,2)$ están alineados.
6. Calcula *m*, para que los puntos $A=(5,-2), B=(-1,1), C=(2,m)$, estén alineados.

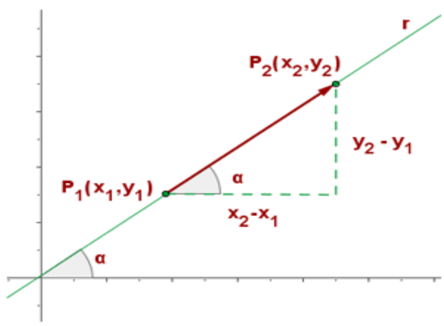
2.- Ecuación de la recta. Ecuación punto pendiente.

Definimos una ***recta*** como el conjunto de puntos del plano alineados con un punto P y con una dirección dada mediante un vector director. Aunque hay varias formas de dar la ecuación de una recta, y cada una de esas expresiones tiene un nombre, nosotros nos vamos a centrar solo en una de ellas, la ***ecuación punto pendiente***. Para hallarla deberemos conocer un punto de la recta $A=(x_0,y_0)$ y la ***pendiente*** de esta, que denotaremos por m, y que es la tangente del ángulo que forma la recta con la dirección positiva del eje X. La ecuación punto pendiente tiene por expresión: $y-y_1=m(x-x_1)$.

Para hallar la pendiente, podemos hacerlo mediante dos formas distintas:

1. Si nos dan el ángulo, la hallamos como la tangente del ángulo.
2. Si nos dan dos puntos, hallamos la pendiente mediante la expresión $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

Veámoslo más claro en el siguiente esquema:



Cuando, la pendiente es positiva, indica que la recta "crece", cuando es negativa, lo contrario.

Cuando desarrollamos la ecuación de la recta dejando la y despejada, el término independiente se le denomina ***ordenada en el origen***.

Veamos dos ejemplos:

- ***Ejemplo 1:*** Obtener la ecuación de una recta que pasa por el punto (1,0) y tiene por pendiente $m = -2$.
  Aplicando la formula general tenemos que $y - 0 = -2(x - 1)$, luego despejando y, nos resulta $y = -2x + 2$.

- ***Ejemplo 2:*** Obtener la ecuación de una recta que pasa por los puntos (1,0) y (-3,2).

  Para ello, hallamos primero la tangente mediante la 2º expresión, luego $m = \frac{2-0}{-3-1} = \frac{1}{-2}$. Tomamos ahora cualquiera de los dos puntos y aplicamos la formula general luego $y - 0 = \frac{1}{-2}(x - 1)$, luego despejando y, nos resulta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

Otra forma de hallar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos $A = (x_0, y_0)$ y $B = (x_1, y_1)$ es aplicando la siguiente relación:

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$

Veamos dos casos particulares de rectas:

- **Rectas paralelas al eje X:** Aquellas que cortan al eje Y, por lo tanto $x = 0$, y la ecuación es de la forma $y = b$.
- **Rectas paralelas al eje Y:** Aquellas que cortan al eje X, por lo tanto $y = 0$, y la ecuación es de la forma $x = a$.

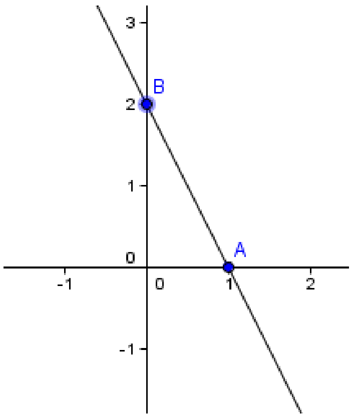
Para finalizar este apartado, diremos que dos ***rectas son paralelas*** si sus pendientes son iguales y que dos ***rectas son perpendiculares*** si la pendiente de una es igual a la inversa de la de la otra con signo contrario.

Para obtener un punto que pertenezca a la recta, no tenemos más que dar valores a la coordenada x, del punto y obtener la coordenada y.

3.- Representación de rectas.

Para representar una recta, no tenemos más que representar los puntos y unirlos, pero con la excepción de que no representamos segmentos como en el tema anterior, sino que en este caso, debemos de continuar la línea "hasta el infinito". Podemos crear una tablita de valores, donde iremos dando valores a una de las coordenadas y obteniendo la otra, en el caso de no tener ningún punto. Representemos la recta del ejemplo 1:

Obtenemos un segundo punto de la recta, en este caso (0,2) luego la representación es:



Ejercicios.

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto (5,5) y tiene de pendiente $m = 5$. Indicar como es la pendiente y obtener otro punto de la recta. Represéntala.
2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (3,-2) y (5,4) y represéntala. ¿Cómo es la pendiente?.
3. Hallar la ecuación de la recta que pasa por (1,-2) y (-3,-2) mediante la relación y represéntala.
4. Hallar la ecuación de una recta paralela a la recta $y = -2x + 3$ y que pasa por el punto (4,5).
5. Hallar la ecuación de una recta perpendicular a la recta $y = -2x + 3$ y que pasa por el punto (-3,2).
6. Hallar la ecuación de una recta perpendicular a la recta $x = 3$ y que pasa por el punto (0,4).

4.- Posiciones relativas de rectas.

Dadas dos rectas, definimos su ***posición relativa*** como la forma en la que está colocada una respecto de la otra. Para estudiar la posición relativas de rectas ponemos las ecuaciones de la recta de la forma $Ax + By + C = 0,\ A'x + B'y + C' = 0$, donde $A, B, C, A', B', C' \in \mathbb{Z}$. Las rectas pueden ser:

- **Secantes:** Se cortan en un punto. Para que sean secantes se debe de cumplir:

$$\boxed{\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}}$$

- **Paralelas:** No tienen ningún punto en común. Para que sean paralelas se debe de cumplir:

$$\boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}}$$

- **Coincidentes:** Se cortan en infinitos puntos. Para que sean coincidentes se debe de cumplir:

$$\boxed{\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}}$$

Cuando las rectas son secantes, podemos calcular el punto en el que se cortan, y definimos ese punto como el punto intersección de las rectas. Para calcularlos no tenemos más que resolver el sistema que forman las rectas (Sistema lineal que aprendimos a resolver en el tema 3).

Veamos un ejemplo: Comprobar si las rectas $r \equiv x + y = 0$, $s \equiv 16x + 16y = 0$, son paralelas:

Para ello hacemos $\frac{1}{16} = \frac{1}{16} \neq \frac{0}{0}$, lo cual es cierto, luego son paralelas.

5.- Ecuación de la circunferencia.

Una circunferencia viene determinada por un centro y un radio, donde el radio es la distancia del centro a cualquier punto de la circunferencia. El doble del radio se le denomina diámetro. Una vez introducido el concepto de circunferencia, definimos la ecuación de una circunferencia por la siguiente expresión $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, donde a, b son las coordenadas del centro, es decir, $Centro(a, b)$, y r es el radio.

Veamos un ejemplo:

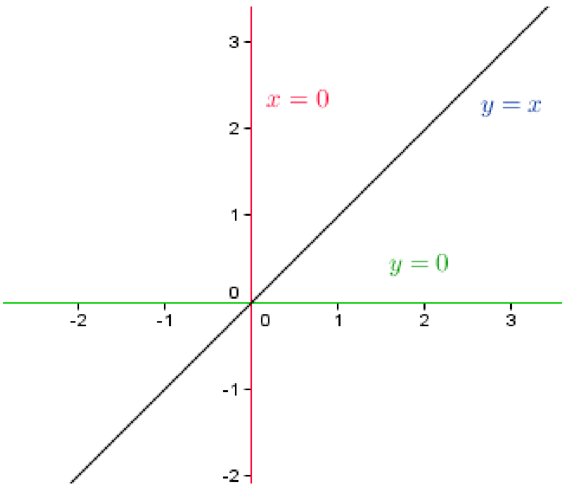
- Calcular la ecuación de la circunferencia de radio 1 y centro (2,2): Hacemos pues $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$.

Si nos diesen su centro y un punto por el que pasa, hallaríamos la distancia del centro al punto, que es el radio, y sustituiríamos en la expresión.

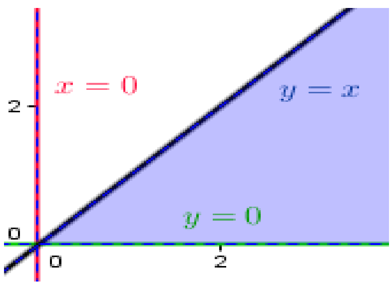
6.- Recintos.

Comencemos esta sección con el concepto de ***recinto***: definimos un recinto como la región del plano determinada por una serie de objetos geométricos (en nuestro caso rectas o circunferencias). Cuando representamos una recta en el plano, podemos observar que la recta divide dicho plano en dos semiplanos. Cuando representamos varias rectas, la región que estas delimitan es a lo que denominamos recinto. Como estudiamos en el tema 4, las inecuaciones no son más que rectas que delimitan una región del plano. Para saber, que parte del plano es la que representa dicha inecuación, la representamos la recta y tomamos un punto del semiplano superior y del inferior, y vemos cual de ellos verifica la inecuación y por lo tanto, ese es el semiplano que nos interesa. Cuando representamos una circunferencia, el razonamiento es prácticamente el mismo. Veamos un ejemplo:

- Representar el recinto delimitado por $x \geq 0, y \geq 0, x \geq y$.
  Para ello representamos las rectas $x = 0, y = 0, x = y$, en primer lugar, bien dando dos puntos o bien mediante una tabla de valores, resultando lo siguiente:

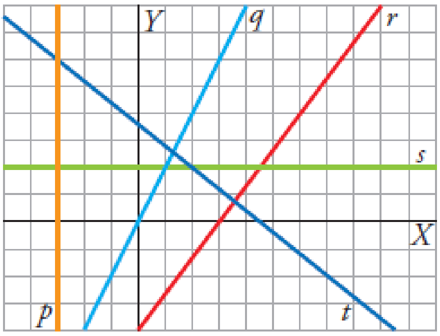


  Ahora, vemos claramente que de las dos primeras rectas, nos dicen que toman valores positivos luego nos quedamos solo con la parte positiva de los ejes cartesianos y nos fijamos en la 3° recta. Tomamos un punto de la región inferior, por ejemplo el (2,0) y vemos que $2 \geq 0$, por lo tanto cumple la restricción y por lo tanto nuestro recinto en este caso es el semiplano inferior de la recta $x = y$:



1. Indica la posición relativa de las siguientes rectas y calcula su punto intersección cuando corresponda.
   a) $r \equiv 2x + 2y = 0, s \equiv 4x + 4y = 3$
   b) $r \equiv 6x + 4y = -8, s \equiv 3x + 2y = -4$
   c) $r \equiv 2x + 2y = 0, s \equiv 4x + 4y = 3$
   d) $r \equiv 2x + 2y = 0, s \equiv 4x + 4y = 3$
2. Calcular las ecuaciones de las circunferencias siguientes y represéntalas:
   a) Radio 2 y centro (0,0)
   b) Radio 4 y centro (-1,2)
   c) Radio 3 y centro (-5,4)
   d) Centro (-1,-1) y pasa por (4,5)
   e) Centro (2,0) y pasa por (1,1)
3. Halla, en cada caso, el punto simétrico de $A = (-3, -5)$ respecto de:
   a) C(-2,0)
   b) P(2,-3)
   c) O(0,0)
4. Si $M = (-3, -5)$, es el punto medio del segmento $\overline{AB}$, hallar B en cada caso:
   a) A(-1,5)
   b) A(6,-4)
   c) A(-4,-7)
5. Comprueba que los puntos siguientes están alineados: $(-1,3)$, $\left(\frac{-5}{2}, \frac{3}{2}\right)$,$(-4, -2)$.
6. Calcular *m* para que los puntos $(5, -m)$, $(2,4)$,$(-4, -2)$.
7. Hallar la ecuación de la recta que pasa por los siguientes puntos y represéntala en cada caso. Indica en cada caso como es la pendiente:
   a) (-1,0) y (0,3)
   b) (0,-2) y (5,-2)
   c) (-2,3) y (4,-1)
8. Hallar la ecuación de la recta en los siguientes casos y represéntala:
   a) Pasa por (-4,2) y tiene pendiente $\frac{1}{2}$.
   b) Pasa por (1,3) y tiene pendiente -2.
   c) Pasa por (5,-1) y tiene pendiente 0.
9. Hallar la ecuación de la recta en los siguientes casos y represéntala:
   a) Paralela a la recta $-4y + 2x + 3 = 0$ y que pasa por el punto (4,0).
   b) Paralela a la recta $2y + 3x - 6 = 0$ y que pasa por el punto (0,-3).
   c) Perpendicular a la recta $y = -2x + 3$ y que pasa por el punto (4,-1).
   d) Perpendicular a la recta $x = 7$ y que pasa por el punto (0,10).
   e) Perpendicular a la recta $y = 3$ y que pasa por el punto (0,399).

10. Escribe las ecuaciones de las rectas que aparecen en el siguiente esquema:



11. Comprueba si los puntos (18,15) y (-43,-5) pertenecen a la recta $-3y + x + 27 = 0$.
12. Calcula *n* y *m,* para que las rectas $r \equiv my + 3x - 8 = 0$ y $s \equiv -2y + nx + 3 = 0$, se corten en el punto (1,5).
13. Halla el punto intersección de las siguientes rectas:
    a) $r \equiv -5y + 3x + 17 = 0$ y $s \equiv 3y + 7x - 63 = 0$
    b) $r \equiv 6y + 3x = 0$ y $s \equiv 2y - 5 = 0$
14. Estudia la posición relativa de las rectas:
    a) $r \equiv -5y + 3x + 15 = 0$ y s: pasa por (-2,-3) y (8,3).
    b) $r \equiv -5y + 2x + 3 = 0$ y s: pasa por (3,1) y (-2,3).
    c) $r \equiv -4y + 5x + 8 = 0$ y s: pasa por (4,7) y (0,2).
15. Halla la ecuación de la recta perpendicular al segmento $\overline{AB}$ en su punto medio, siendo $A = (-5,3), B = (2,7)$.
16. Las rectas *r, s* pasan por el punto (-4,2), *r* es paralela a $3x - 12 = 0$ y *s* es perpendicular a ella. Representa dichas rectas y halla las ecuaciones de *r* y *s.*
17. La recta *r* es paralela a $5x - 4y + 3 = 0$ y *s* es perpendicular a ellas. Representa dichas rectas y halla las ecuaciones de *r* y *s.*
18. Calcula la distancia entre los puntos:
    a) (3,5) y (3,-7)
    b) (-8,3) y (-6,1)
    c) (0,-3) y (-5,1)
    d) (-3,0) y (15,0)
19. Escribe la ecuación de las siguientes circunferencias y represéntalas:
    a) Tiene de centro (3,-2) y de radio 3
    b) Tiene de centro (0,0) y pasa por (0,4)
    c) Tiene de centro (0,1) y de radio 4
    d) Tiene de centro (-1,0) y pasa por (-3,2)
20. Indica cual es el centro y el radio de las siguientes circunferencias:
    a) $(x - 7)^2 + (y - 12)^2 = 9.$
    b) $(x)^2 + (y + 7)^2 = 81.$
    c) $(x - 1)^2 + (y)^2 = 4.$

21. Representa los siguientes recintos:

a) $x \geq 0, y \geq 0, y \geq x, y \leq 7.$
b) $y \geq 0, x \leq 3y, y + x \leq 3.$
c) $x \geq 0, x \geq y + 1, x \leq y - 1.$
d) $x - y \leq 0, x \leq 3.$
e) $x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0, x \leq 0.$
f) $(x + 1)^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0, x \geq -1.$