

Tema 8: Funciones I.

Características.

Iniciamos la primera parte de los dos temas que vamos a dedicar al bloque de análisis, en el cual vamos a conocer y definir el concepto de **función** y los principales "objetos o ingredientes" matemáticos que la forman. Posteriormente, estudiaremos las características más importantes de las funciones y terminaremos el tema, dando a conocer las **funciones simétricas y periódicas**.

1.- Concepto de función.

Para introducir la sección, damos una idea intuitiva de lo que es una **función**. Supongamos que tenemos cuatro caramelos y tres amigos, de modo que queremos repartir esos cuatro caramelos entre nuestros tres amigos, de modo que cada uno tenga un caramelo y ninguno se quede sin uno, además, solo podemos repartir un único caramelo por cada amigo. Pues bien, este razonamiento tan sencillo, nos permite definir el concepto de función de forma muy clara:

Dados dos conjuntos A y B , definimos como función f al "objeto" matemático denominado correspondencia, que "asigna" a cada objeto de A un único objeto en B , es decir, cada objeto de A tiene una única imagen en B . Denotamos una función así:

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

Hemos introducido el concepto en un recuadro, ya que es muy importante y debemos de tenerlo muy claro. En nuestro ejemplo intuitivo, el conjunto A es el conjunto formado por los caramelos que tenemos y el conjunto B el conjunto de nuestros amigos. Al conjunto A se le denomina **dominio** de la función y se define como el conjunto de valores donde está definida la función, escrito matemáticamente sería:

$$\text{Dominio} = A = \{x \in A: \text{solo existe una } \acute{u}\text{nica } f(x) \text{ en } B\}$$

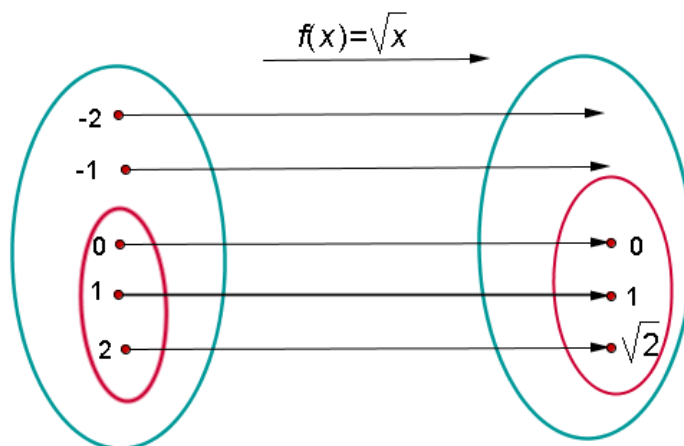
Del mismo modo, al conjunto B se le denomina **recorrido o imagen** de la función y matemáticamente sería:

$$\text{Recorrido} = \text{Imagen} = B = \{f(x) \in B: x \in A\}$$

En este curso, solo vamos a estudiar funciones cuyo dominio e imagen es \mathbb{R} o un subconjunto de este, es decir, el conjunto A y B solo van a tomar valores reales. Un ejemplo de función es la siguiente:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \text{ (1)}$$

$$x \longrightarrow f(x) = \sqrt{x}$$



(1) Definimos \mathbb{R}^+ como el conjunto de puntos de la recta real mayores o iguales que cero, es decir, el intervalo $(0, +\infty)$. Análogamente, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0)$.

Llegado a este punto podríamos pensar, ¿Puede existir una función, que "invierta" los valores y nos envíe los elementos de B a A?, en el ejemplo anterior diríamos, ¿Puede que todos los amigos "rechazaran" el caramelo y te lo "devolvieran"? Pues la respuesta es afirmativa, definimos entonces la **función inversa** como:

Dados dos conjuntos A y B, definimos como función inversa de una función f al "objeto" matemático denominado correspondencia, que "asigna" a cada objeto de B un único objeto en A, es decir, cada objeto de B tiene una única imagen en A. Denotamos una función así:

$$f^{-1}: B \longrightarrow A$$

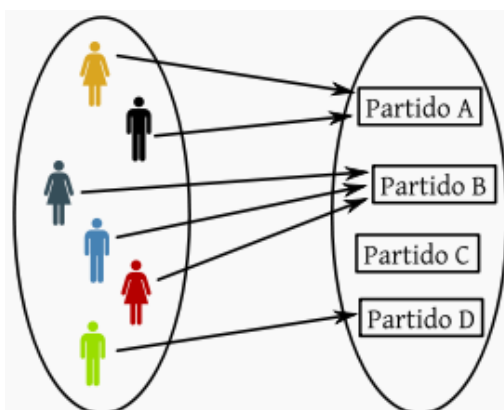
$$x \longrightarrow f^{-1}(x)$$

Para los ejercicios, el cálculo de la función inversa, no es más que despejar de la ecuación $y = f(x)$. Por ejemplo, para calcular la inversa de $f(x) = x - 2$, hacemos $y = x - 2$, de donde $y + 2 = x = f(y)$ luego $f^{-1}(x) = x + 2$.

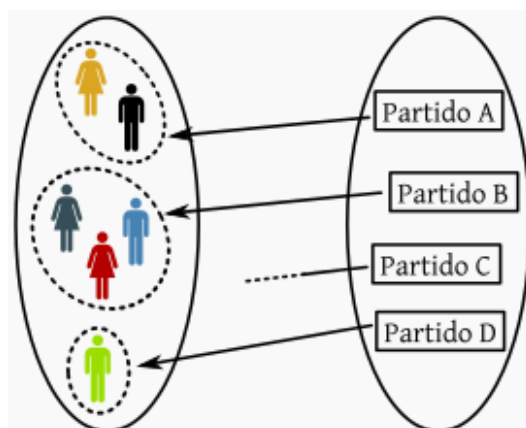
Otro ejemplo intuitivo de función con su correspondiente función inversa es el siguiente:

Supongamos que tenemos elecciones para el gobierno de España, y por lo tanto tenemos dos conjuntos, el conjunto de votantes (A) y el conjunto de partidos que van a ser votados (B).

Cada votante solo puede elegir un único partido, por lo tanto nuestra función envía votantes a partido votado. Por supuesto, varios votantes pueden votar al mismo partido como podemos ver en el siguiente diagrama:



Ahora pues, nuestra función inversa asocia cada partido a el número de votantes que la han votado, como podemos observar en el siguiente diagrama:



2.- Cálculo del dominio de funciones elementales.

En el próximo tema, estudiaremos este tipo de funciones a fondo, con sus principales y propias características, pero en este tema introduciremos los dominios de cada función y el cálculo genérico de estos. Las funciones elementales no son más que polinomios, radicales y expresiones algebraicas de cocientes de polinomios. Aprendamos a calcular los dominios de estas:

- **Dominio de funciones polinómicas:** este es el más sencillo de todos, puesto que, como ya sabemos, el dominio es el conjunto de puntos donde está definida la función, por lo tanto, los polinomios siempre están definidos y su dominio de definición es \mathbb{R} , por lo que es el caso más sencillo.
- **Dominio de funciones radicales:** Como ya sabemos, las funciones radicales se caracterizan por estar definidas en un subconjunto de la recta real, que son el

conjunto de números positivos. Dicho de otra forma, el radicando debe de ser > 0 . De este modo se obtiene una inecuación que al resolver nos da el dominio de definición de la función. En el caso de que el radicando sea una expresión como por ejemplo un polinomio de 2º grado, que es lo que vamos a estudiar en este caso, deberemos de obtener una unión de varios intervalos de definición. Veamos un ejemplo:

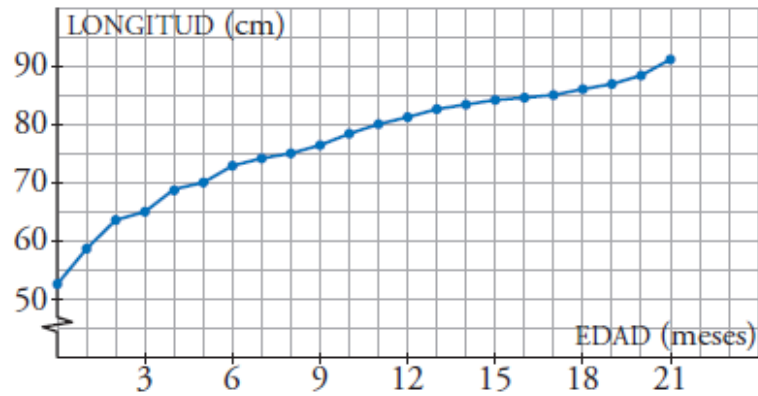
- Calcular el dominio de definición de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$:
 En este caso, se tiene que verificar que $x^2 - 4 > 0$, por lo tanto resolviendo la inecuación resulta $x = \pm 2$. Dibujamos pues una recta real representando nuestros valores, resultando 3 intervalos, de los cuales vamos a tomar un valor cualquiera y comprobar si se verifica la inecuación. Los valores a tomar por ejemplo son -3, 0 y 3. Por lo que $(-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5 > 0$ verifica la inecuación por lo tanto un intervalo de definición es $(-\infty, -2]$, ahora $(0)^2 - 4 = 0 - 4 = -4 \not> 0$, por lo tanto no verifica la inecuación, y finalmente $(3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5 > 0$, que también verifica la inecuación, por lo tanto otro intervalo de definición es $[2, +\infty)$, por lo que el dominio de $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ denotado por $Dom(f(x)) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

- **Dominio de funciones fraccionales o cocientes:** En este caso, tenemos una expresión fraccionaria, donde el dominio de definición son los conjuntos de puntos donde no se anula el denominador, es decir, donde el denominador nunca se haga cero, ya que sino, la expresión daría el valor ∞ , y una función no puede tomar ese valor. Definimos pues el dominio como $\mathbb{R} \setminus \{*\}$, donde (*) es el conjunto de puntos donde si se anula la función. Veamos un ejemplo:

- Calcular el dominio de definición de $f(x) = \frac{1}{x-1}$:
 Para calcular el conjunto de puntos donde se anula el denominador, resolvemos la ecuación $x - 1 = 0$, resultando $x = 1$, por lo tanto el dominio de definición es $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

3.- Representación de funciones: Gráficas.

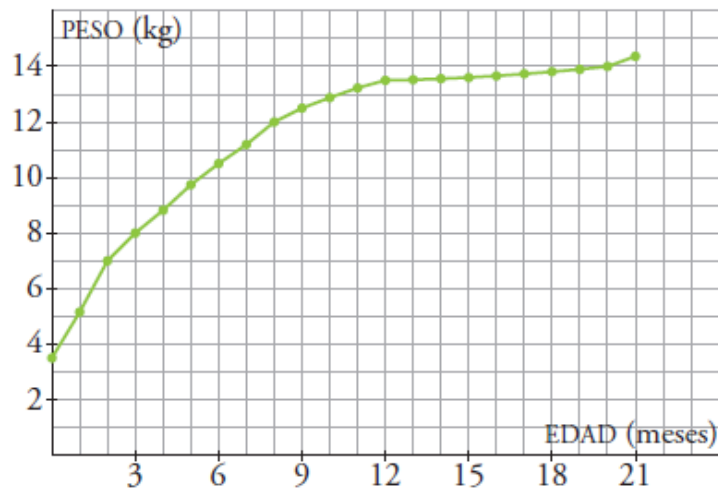
Veamos un pequeño apartado de representación de funciones y análisis de gráficas. En el tema anterior, ya representábamos funciones, como eran las rectas. Una recta es una función polinómica que normalmente representábamos de la forma $y = mx + n$, pues bien, si tomamos $y = f(x) = mx + n$, obtenemos la expresión de función que conocemos, es decir, a cada valor de x , le hacemos corresponder un valor $y = f(x)$. Para representar funciones gráficamente, pintamos unos ejes coordenados y tomamos una tabla de valores, obteniendo puntos que vamos pintando. Una vez pintada la gráfica, esta nos puede dar bastante información sobre la función que estamos analizando como su dominio, recorrido, etc. Por ejemplo, la siguiente gráfica, nos muestra datos de la edad y la longitud de un individuo:



A través de ella podemos ver cual es su dominio, que en este caso es los valores que toma $x = Edad$, luego su dominio es $(0,21)$. Su recorrido es $(52,90)$. Podemos estudiar, la edad que tenía cuando medía 90 cm, que en este caso es 21 meses, y así podemos estudiar varias cosas sobre una gráfica. Una vez visto todo esto, estamos en condiciones de comenzar a hacer nuestros primeros ejercicios sobre funciones.

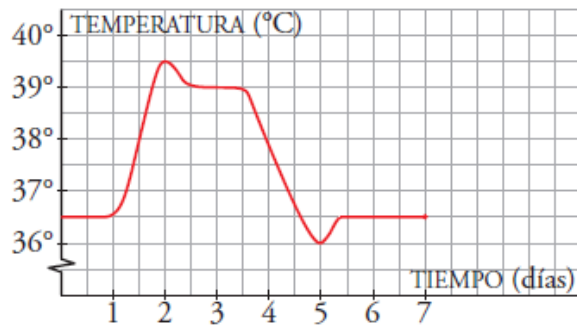
Ejercicios.

1. Utilizando la gráfica anterior y la siguiente obtener:



- Edad y peso del individuo cuando nació y tenía 15 años.
- Crecimiento en los 6 primeros meses.
- Mes en el que creció más.
- Aumento de peso en los dos primeros meses.
- Peso que tenía cuando medía 80 cm.

2. La siguiente gráfica muestra la evolución de la temperatura de un enfermo:



- a) ¿Cuánto tiempo estuvo en observación?
 - b) Indica el dominio y recorrido de la función representada.
 - c) Cuanto descendió la temperatura entre el 4° y 5° día.
3. Representa la función $y = f(x) = x^3 - 3x + 2$ en el intervalo $[-2,3]$ e indica su recorrido.
4. Calcula la función inversa de:
- a) $f(x) = 3x + 1$
 - b) $f(x) = \frac{3x+2}{x}$
 - c) $f(x) = \sqrt{x+6}$
5. Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:
- a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$
 - b) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
 - c) $f(x) = 3x + 1$
 - d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
 - e) $f(x) = \sqrt{x+7}$
 - f) $f(x) = \sqrt{x-4}$
 - g) $f(x) = 1 + 5\sqrt{2x-2}$
 - h) $f(x) = \frac{2x}{2x-1}$
 - i) $f(x) = \frac{3x+2}{x}$
 - j) $f(x) = \frac{1}{x^2-2x+1}$

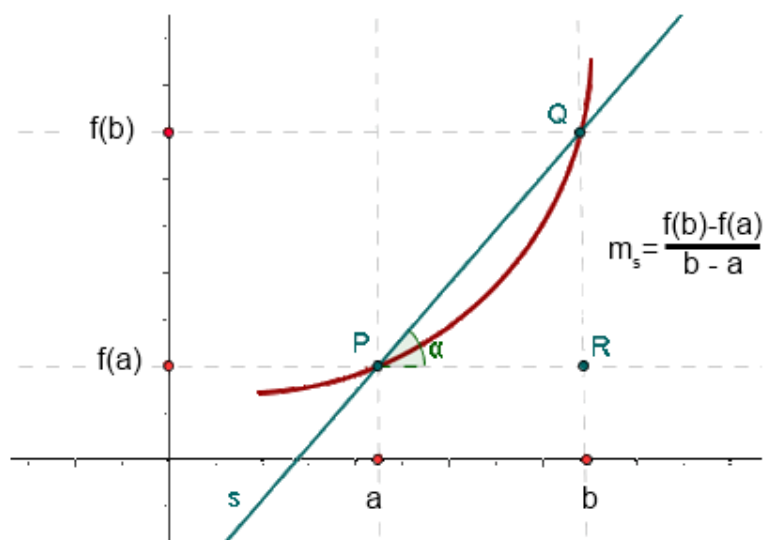
4.- Crecimiento y decrecimiento. Tasa de variación media.

Definimos en esta sección varios conceptos fundamentales para el estudio de una función como son el crecimiento y decrecimiento de esta, pero antes, definiremos el concepto de

Tasa de variación media (T.V.M): definimos la tasa de variación media como la variación de una función al pasar de un punto a otro. Otros libros la definen como el incremento o decremento de una función. Matemáticamente, se calcula la T.V.M mediante la siguiente expresión:

$$T.V.M_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Como podemos observar, la T.V.M, se estudia en un intervalo y si recordamos un poco el tema anterior de rectas, tiene cierta similitud con la expresión de cálculo de la pendiente de una recta. Lo podemos apreciar más claramente en el siguiente esquema:



Ejemplo:

- Calcular la T.V.M de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el intervalo $[0,2]$:
Para ello hacemos $a = 0$, $b = 2$ luego $f(a) = f(0) = 0 + 1 = 1$, $f(b) = 2^2 + 1 = 5$, luego: $T.V.M_{[0,2]} = \frac{5-1}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$.

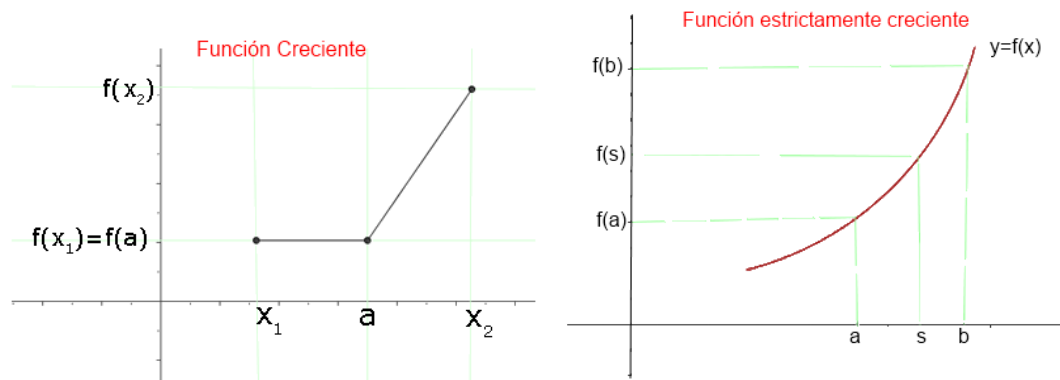
Una vez estudiado este concepto, vamos a estudiar los conceptos de crecimiento y decrecimiento:

Definimos el **crecimiento** de una función f , en un intervalo $[a, b]$, cuando se verifica:

$$\begin{aligned} \text{Si } a < b &\rightarrow f(a) < f(b) \\ \text{Si } a > b &\rightarrow f(a) > f(b) \end{aligned}$$

En este caso diremos que la función es **estrictamente creciente** y además, la tasa de variación media es positiva. El signo de las desigualdades pueden ser también \leq, \geq , pero en este caso la función no sería estrictamente creciente en ese intervalo, sino solamente

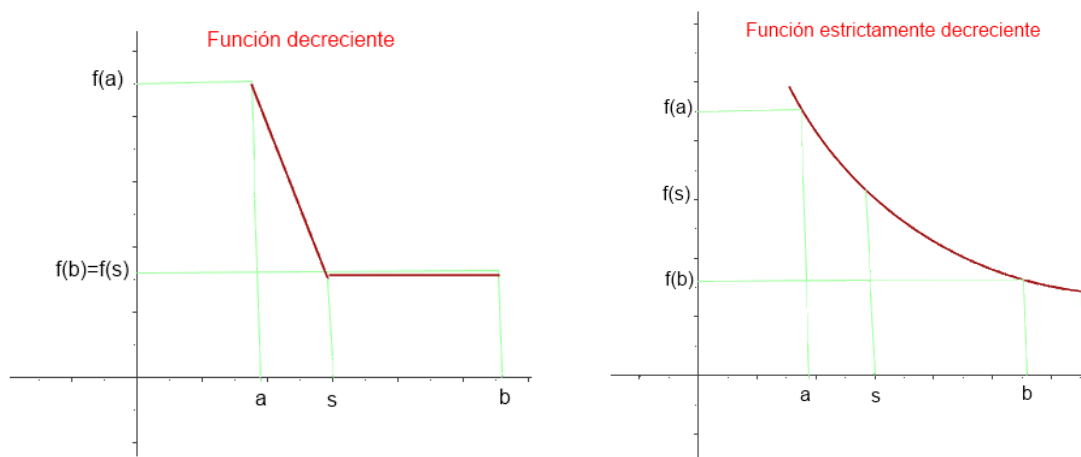
creciente y su tasa de variación media sería positiva o cero. Mostramos a continuación una serie de gráficas ilustrando lo mencionado anteriormente.



Definimos el **decrecimiento** de una función f , en un intervalo $[a, b]$, cuando se verifica:

Si $a < b \rightarrow f(a) > f(b)$
 Si $a > b \rightarrow f(a) < f(b)$

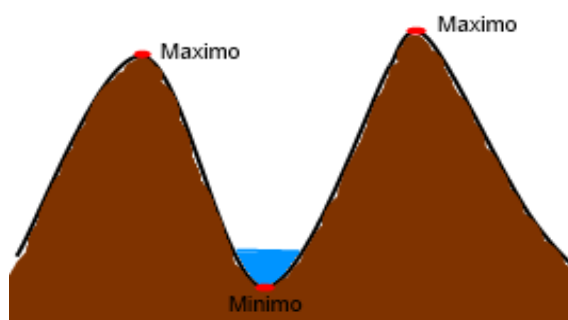
En este caso diremos que la función es **estrictamente decreciente** y además, la tasa de variación media es negativa. El signo de las desigualdades pueden ser también \leq, \geq , pero en este caso la función no sería estrictamente decreciente en ese intervalo sino solamente decreciente y su tasa de variación media es negativa o cero. Mostramos a continuación una serie de gráficas ilustrando lo mencionado anteriormente.



5.- Máximos y mínimos.

Coloquialmente, un máximo es el punto más alto y un mínimo el punto más bajo. Si tuviésemos ante nosotros un paisaje en el cual observásemos dos montañas entre las cuales hay un río, podríamos decir que en ese paisaje hay dos máximos y un mínimo, los máximos corresponderían las cimas de las montañas y el mínimo, el soporte del río. En este caso, nuestra función, sería representada gráficamente como el relieve de las montañas y el río.

A grosso modo, si tenemos una función representada gráficamente, podemos determinar sus máximos y mínimos, en caso de que tuviese, simplemente observándola.

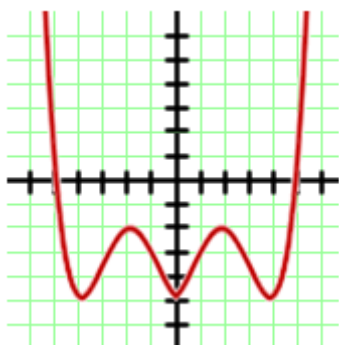


Si una función crece y luego decrece, normalmente suele formar (tener) un máximo. Lo mismo ocurre al contrario, si primero decrece y luego crece, suele formar (tener) un mínimo.

Estamos pues en condiciones de definir formalmente lo que son los máximos y mínimos y los dos tipos que hay:

- Decimos que una función tiene un **máximo absoluto**, cuando el valor de la función en ese punto sea mayor o igual que cualquier otro valor en todo el dominio.
- Decimos que una función tiene un **mínimo absoluto**, cuando el valor de la función en ese punto sea menor o igual que cualquier otro valor en todo el dominio.
- Decimos que una función tiene un **máximo relativo**, cuando el valor de la función en ese punto sea mayor o igual que en cualquier otro valor de los puntos cercanos a este.
- Decimos que una función tiene un **mínimo relativo**, cuando el valor de la función en ese punto sea menor o igual que en cualquier otro valor de los puntos cercanos a este.

Veamos pues un ejemplo:



La siguiente gráfica tiene 3 mínimos relativos y absolutos, ya que son relativos por que alcanzan los valores más pequeños de la función y son iguales entre ellos, y son absolutos ya que son los más pequeños en todo el dominio de definición.

Tiene 2 máximos relativos pero no absolutos. Relativos ya que alcanzan los valores más grandes de la función en puntos cercanos a ellos y son iguales entre ellos, y no son absolutos ya que la función alcanza aun valores más grandes en todo el dominio.

6.- Funciones simétricas.

La idea de **simetría** es la misma que todos conocemos. Dos objetos decimos que son simétricos si son similares el uno del otro respecto a un eje. Un ejemplo de simetría podemos verlo en una mariposa, cuando pintamos solo la mitad de ella en una mitad de una hoja y al doblarlo por la mitad (sería nuestro eje), y la pegamos a la otra mitad del folio y al despegarla obtenemos de nuevo obtenemos la mariposa completa.

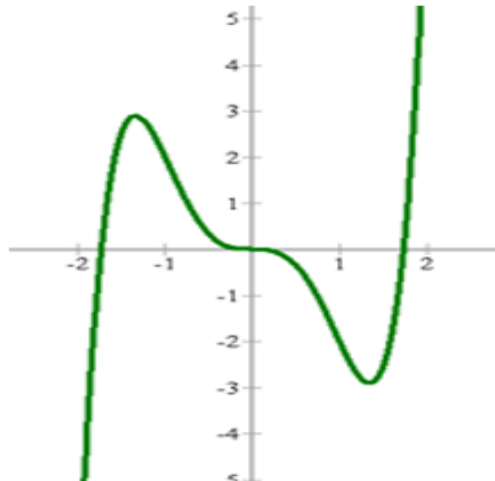
Lo mismo ocurre con las funciones. Dependiendo del eje al que sean simétricas, podemos definir dos tipos de funciones simétricas:

- Funciones **simétricas con respecto al eje de ordenadas (OY)**: A este tipo de funciones las llamamos **función par** y verifican que para todo valor x del dominio se tiene que $f(x) = f(-x)$.



Esta función es par, ya que $f(-1) = 2 = f(1)$, y en general ocurre para cada valor x del dominio. Pero, ¿Qué ocurre si queremos comprobar que una función es par a través de su expresión?. Basta comprobar la condición. Supongamos que tenemos la función $f(x) = x^2$, veamos que es par, para ello hacemos $f(-x) = (-x)^2 = (-x) \cdot (-x) = x^2 = f(x)$, luego ya lo tendríamos probado.

- Funciones **simétricas con respecto al eje de coordenadas (OX)**: A este tipo de funciones las llamamos **función impar** y verifican que para todo valor x del dominio se tiene que $f(-x) = -f(x)$.

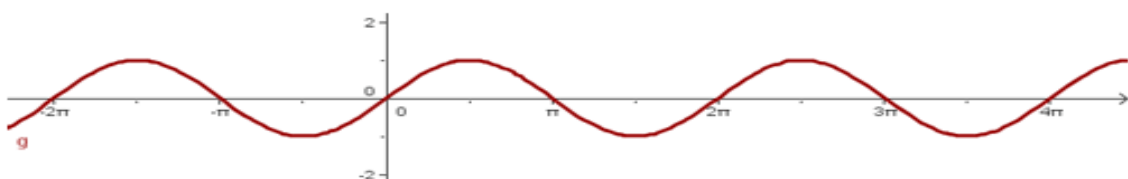


Esta función es impar, ya que $f(-1.3) = 3$ y $-f(1.3) = -3$, entonces $f(-1.3) = -f(1.3)$ y en general ocurre para cada valor x del dominio.

7.- Funciones periódicas.

Un periodo no es más que un instante de tiempo en el cual se está repitiendo una secuencia. Definimos pues una **función periódica** como aquella que se repite cada cierto tiempo (intervalo). Formalmente sería: Una función es periódica de periodo K si para cada número entero n se verifica que $f(x) = f(x + nK)$, donde n indica el periodo en el que estamos.

La función *Seno*, que ya conocemos y que estudiaremos con profundidad en el siguiente tema, es periódica de periodo 2π , ya que $\text{Sen}(x + 0) = x = \text{Sen}(x + n2\pi)$, como podemos ver reflejado en su representación gráfica:



Si queremos hallar el periodo de una función similar, por ejemplo $\text{Sen}(2x)$ basta con tomar el nuevo periodo como $K' = \frac{K}{t}$, donde t es el valor que aparece multiplicando a x y K es el periodo de la función original. En nuestro caso, $K' = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Ejercicios Propuestos.

1. Determina el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{5x-16}{6}$

b) $f(x) = \frac{12x - \sqrt[3]{16}}{x^2 - 4x + 4}$

c) $f(x) = \sqrt[3]{18x - 19}$

d) $f(x) = \sqrt{12x + 3}$

2. Un nadador se deja caer desde un trampolín. Su entrenador ha medido el espacio que recorre cada cuatro décimas de segundo mediante un método fotográfico, hasta detenerse a los 17 metros, obteniendo la siguiente tabla:

TIEMPO (s)	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4
ESPACIO (m)	0	0,78	3,13	7,05	12,5	12,58	16,6

a) Representa la gráfica espacio-tiempo.

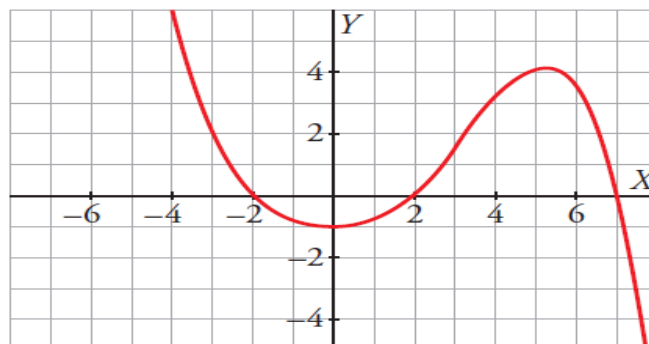
b) ¿En qué momento entró en el agua?

c) Sabiendo que el cálculo de la velocidad viene dado por la expresión

$$\text{Velocidad} = \frac{\text{Espacio}}{\text{Tiempo}}. \text{ ¿Qué velocidad llevaba cuando entró en el agua?}$$

d) ¿Qué altura tiene el trampolín?

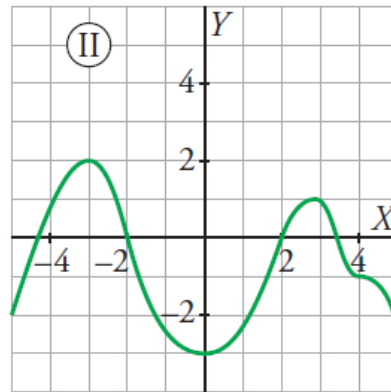
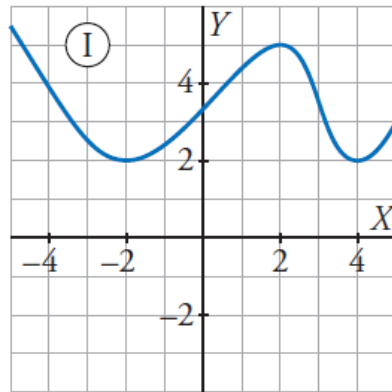
3. Dada la siguiente gráfica:



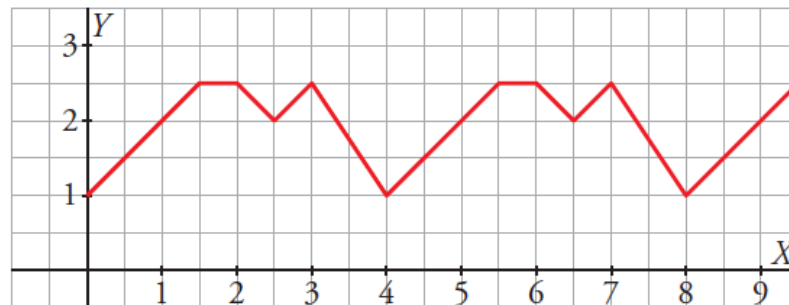
a) Obtener su dominio y recorrido.

b) ¿Es continua?. Razónalo.

- c) ¿Es estrictamente creciente? ¿Y estrictamente decreciente?. En caso negativo, halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
 - d) Calcula los puntos máximos y mínimos, en el caso de tener y razona si son absolutos y relativos.
 - e) ¿Es par? ¿Es impar?. Razónalo.
 - f) Halla la tasa de variación media en los intervalos $[-2,4]$, $[-2,2]$, $[0,4]$.
4. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 3x^3 + 9x^2 - 3x - 9$ en los intervalos $[0,6]$, $[-1,0]$, $[-3,-1]$.
5. Dadas las siguientes gráficas, obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los puntos máximos y mínimos. ¿Hay algún máximo o mínimo absoluto?



6. Analizar la siguiente gráfica:



- a) Calcular su dominio de definición y recorrido.
 - b) ¿Es continua?. Razónalo.
 - c) ¿Es simétrica?. Razónalo.
 - d) ¿Es periódica?. En caso afirmativo, calcula su periodo.
 - e) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento que aparecen representados.
7. Determina si las siguientes gráficas son simétricas e indica el tipo de simetría en caso de ser afirmativo:
- a) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 4$
 - b) $f(x) = x^5 - 3x^3$

8. Determina el periodo de las siguientes funciones periódicas:

a) $f(x) = \text{Cos}(x)$

b) $f(x) = \text{Sen}(4x)$

c) $f(x) = \text{Cos}(3x)$

d) $f(x) = \text{Tg}(x)$

e) $f(x) = \text{Tg}\left(\frac{x}{2}\right)$
