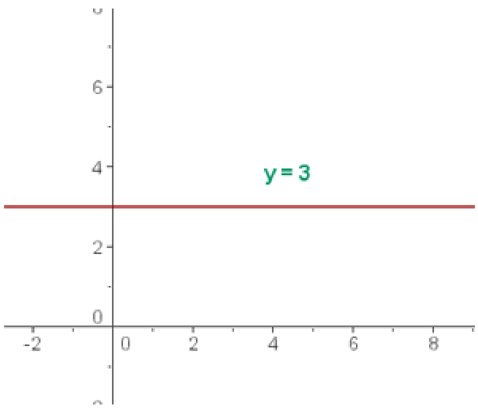
Tema 9: Funciones II. Funciones Elementales.

Finalizamos con este tema el bloque de análisis, estudiando los principales tipos de funciones con sus respectivas características. Veremos también una ligera aplicación de estas mismas a la vida cotidiana y veremos como podemos representarlas conociendo su expresión general.

1.- Función constante.

Comenzamos el tema con las funciones más simples, las **funciones constantes**. Definimos por constante algo que no varía. En nuestro caso, una función constante no es más que una función que asocia a cada valor del dominio, el mismo valor en la imagen, es decir, todo punto del dominio siempre tiene la misma imagen: $f(x) = a$, con $a \in \mathbb{R}$.

En general su dominio va a ser todo $\mathbb{R}$. Son rectas horizontales paralelas al eje de abscisas, de pendiente 0. Su representación gráfica es la más sencilla, ya que siempre se le asocia el mismo el valor. Por ejemplo, para la función $f(x) = 3$, su representación es:

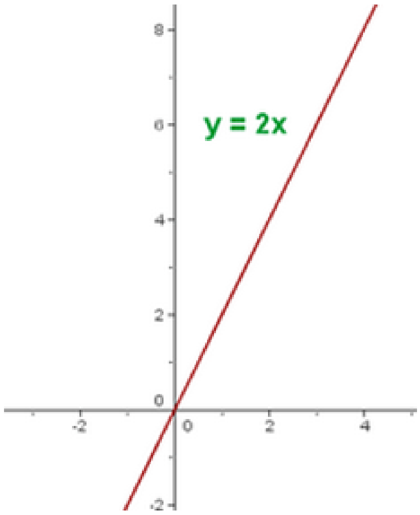


Ahora, ¿Pueden ser las funciones constantes rectas paralelas al eje de ordenadas, y por lo tanto verticales?. La respuesta es NO, ya que para un valor del dominio, tendríamos infinitas imágenes y no sería función.

2.- Funciones lineales: $y = mx$.

Las **funciones lineales**, son también rectas con la peculiaridad de que siempre pasan por el origen de coordenadas (0,0). Su expresión general es $y = mx$, donde m es la pendiente (inclinación) de la recta. Si la pendiente es positiva, diremos que la función es creciente y en caso contrario, decreciente. Su dominio es todo $\mathbb{R}$. Para representarlas, basta con crear una tabla de valores y obtener dos puntos.

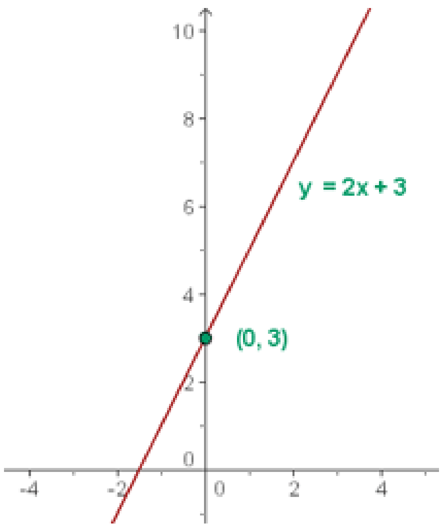
Un ejemplo de función lineal es el siguiente: $f(x) = 2x$, cuya representación es:



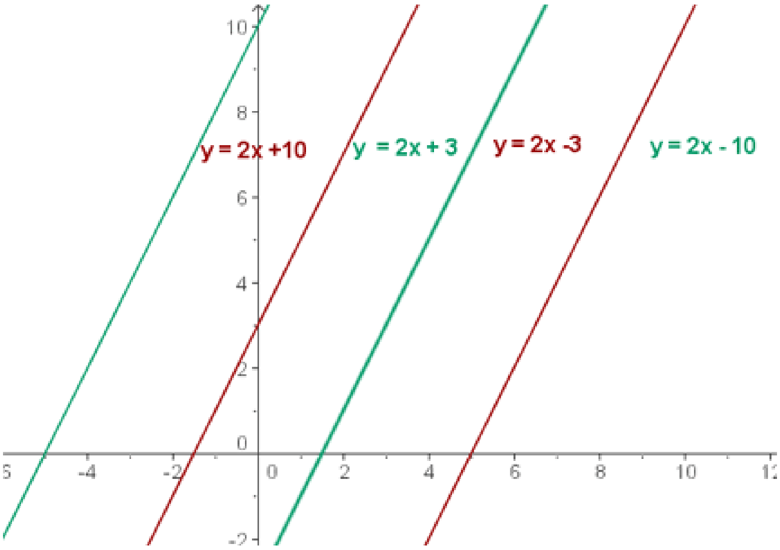
3.- Funciones afines: $y = mx + n$.

Las **funciones afines**, también son rectas como habréis podido comprobar, ya que la expresión general es muy similar a la de las funciones lineales, solo que hemos añadido un valor $n \in \mathbb{R}$, que nos indica, el punto en el que la función corta al eje de ordenadas, y por lo tanto una traslación de la función lineal con respecto al origen. Cuando $n = 0$, tenemos pues una función lineal. Las características son similares a la de las funciones lineales y su representación se realiza de forma análoga.

Un ejemplo sería la función: $f(x) = 2x + 3$, cuya representación es:



En general, diremos que dos rectas son paralelas, si tienen la misma pendiente (Esto ya fue estudiado en el tema 7). Ejemplo de rectas paralelas son:



Ya que como se puede observar, la pendiente de todas ellas es $m = 2$.

Ejercicios.

1. Representa las siguientes funciones e identifica el tipo correspondiente (constante, lineal o afín):
   a) $f(x) = 3x - 3$
   b) $f(x) = 4x$
   c) $f(x) = 0$
   d) $f(x) = 8x - 9$
   e) $f(x) = -5$
   f) $f(x) = 1 - 3x$
   g) $f(x) = 1 + \frac{x}{2}$
2. Obtener una función lineal que pase por (0,0) y sea paralela a las rectas de la última gráfica de la sección. Indica el valor de la ordenada en el origen.
3. Representar la velocidad de un móvil, que lleva un movimiento rectilíneo uniforme con velocidad 16 m/s.
4. La ecuación del movimiento de un automóvil viene dada por la expresión $e = 10 + vt$, Donde v es la velocidad y t el instante de tiempo en el que se encuentra. Identificar dicha expresión con alguna de las funciones dadas y representarla cuando el automóvil lleva una velocidad de 50 km/h. Representa también la gráfica velocidad-tiempo.

4.- Funciones cuadráticas. Parábolas.

Las **funciones cuadráticas** son aquellas cuya expresión es la de un polinomio de segundo grado: $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Su dominio es todo $\mathbb{R}$. Las parábolas presentan una curvatura y su punto máximo o mínimo, según corresponda, se le denomina **vértice** de la parábola.

Las funciones cuadráticas se les denominar positivas, cuando su coeficiente líder (a) es positivo $(a > 0)$ y estás suelen tener la forma $\cup$, a las cuales denominamos cóncavas. En caso contrario las denominamos negativas y suelen tener la forma $\cap$, a las cuales denominamos convexas.

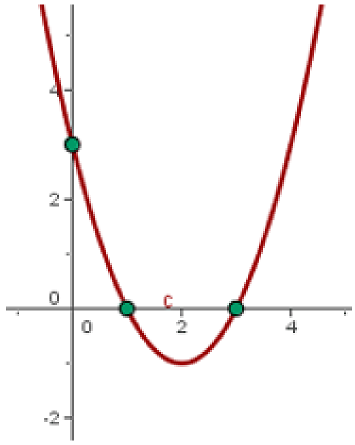
Pasamos pues a aprender a representar este tipo de funciones y para ello lo haremos mediante un ejemplo:

- Sea la función cuadrática de expresión general $f(x) = x^2 - 4x + 3$:

    1. <u>Hallamos el vértice:</u> calculamos la coordenada x del vértice que denotamos por x_v y que calculamos mediante la expresión $x_v = \frac{-b}{2a}$ en nuestro caso será: $x_v = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$. Ahora sustituimos el valor en la función cuadrática y obtenemos la coordenada $y_v = f(x_v) = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$, luego nuestro vértice es el (2,-1).

    2. Obtenemos los puntos de corte con los ejes:
        a) <u>Puntos de corte con el eje OX:</u> Razonemos, si cortamos el eje OX, ¿Qué valor toma la coordenada y?. La respuesta es 0. Luego ya sabemos que $y = 0$. Observando la función cuadrática obtenemos que $y = f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$, luego tenemos una ecuación de segundo grado cuyos valores son $x = 3, x = 1$, luego los puntos que obtenemos son (3,0) y (1,0).
        b) <u>Puntos de corte con el eje OY:</u> Razonemos, si cortamos el eje OY, ¿Qué valor toma la coordenada x?. La respuesta es 0. Luego ya sabemos que $x = 0$. Sustituyendo en la función cuadrática obtenemos que $y = f(x) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$, luego el punto que obtenemos es el (0,3).

    3. Finalmente representamos los puntos y obtenemos nuestra gráfica:



Si nos damos cuenta, la gráfica tiene la forma que sabíamos de antemano, ya que su coeficiente líder es $1 > 0$, luego es una función cuadrática positiva.

5.- Resolución de sistemas de forma gráfica.

Una vez que tenemos estudiadas las funciones lineales, lineales afines y cuadráticas, podemos pasar a aplicarlos sobre algo que ya hemos estudiado en temas previos: los sistemas de ecuaciones.

Esta vez, resolveremos dichos sistemas de forma gráfica y finalmente, si uno lo desea, podrá comprobar la solución resolviendo el sistema como sabemos, de forma analítica.

Para ello, basta con representar las gráficas de las funciones de nuestro sistema y ver los puntos de cortes entre ellas, los cuales van a ser nuestras soluciones del sistema. Veamos un ejemplo:

- Supongamos que tenemos el siguiente sistema formado por las funciones: $\begin{cases} y = 2x^2 - 5x - 6 \\ y = 3x + 4 \end{cases}$. Como podemos observar, la primera función es una función cuadrática (parábola) y la segunda una función afín (recta).

  Primero resolvemos el sistema analíticamente:
  1. Resolvemos por el método de igualación, ya que es el más cómodo en este caso, luego igualamos ambas ecuaciones resultando $2x^2 - 5x - 6 = 3x - 4$, despejamos dejando un cero a un lado de la igualdad $2x^2 - 8x - 2 = 0$, resolvemos la ecuación de segundo grado y obtenemos los valores $x = 5$, $x = -1$.
  2. Sustituimos ambos valores en una de las dos ecuaciones (la que sea más cómoda), en este caso la segunda, obteniendo así los valores $y = 19, y = 1$.

Resolviendo el sistema, lo que hacemos es obtener los puntos de corte de ambas gráficas, en nuestro caso son (5,19) y (-1,1). Pasamos a resolverlo gráficamente.

Obtenemos los datos necesarios para representar la parábola:

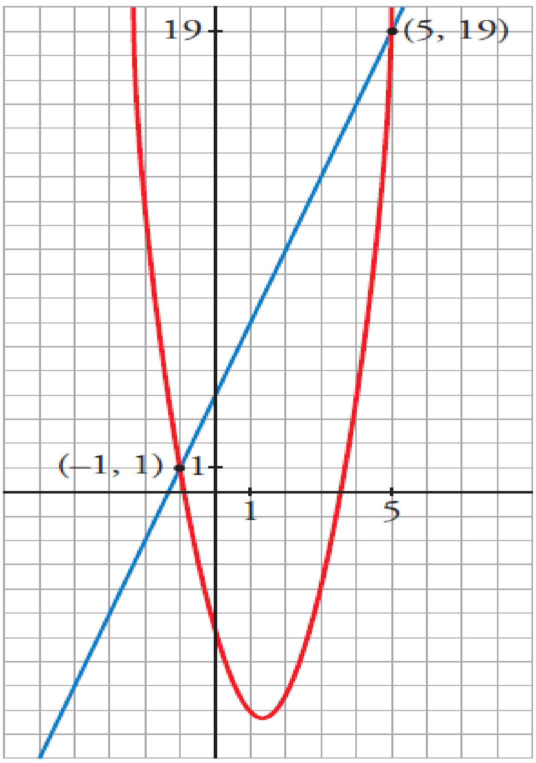
1. Puntos de corte con el eje X: $2x^2 - 5x - 6 = 0$ entonces $x = 3{,}38, x = -0.88$, luego los puntos de corte son (3,38,0) y (-0,88,0).
2. Puntos de corte con el eje Y: $y = 2 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 - 6 = -6$ luego corta al eje en el punto (0,-6).
3. Calculamos el vértice: $v_x = \frac{5}{4}$, entonces $v_y = 2v_x^2 - 5v_x - 6 = \frac{-73}{8}$.

Obtenemos los datos necesarios para representar la recta:

1. Hacemos nuestra tabla de valores, con los puntos de corte que obtuvimos al resolver el sistema analíticamente:

x	-1	5
y	1	19

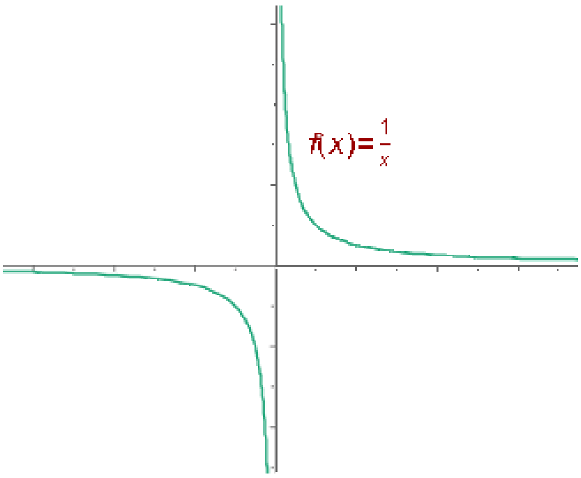
Finalmente, pintamos nuestras gráficas, con los valores que hemos obtenido de cada una y vemos que realmente se verifica nuestro sistema:



6.- Funciones racionales. Funciones de proporcionalidad inversa.

Como ya vimos en el tema anterior, las **funciones racionales** no son más que funciones formadas por cocientes de polinomios. Su dominio de definición, como ya sabemos del tema anterior, son todos los valores del dominio, salvo los que se anule el denominador, es decir, donde el denominador se haga cero. Dentro de este tipo de funciones tenemos aquellas que denominamos de **funciones de proporcionalidad inversa** que son de la forma $f(x) = \frac{k}{x}$, donde $k \in \mathbb{R}$.

Este tipo de funciones tienen la siguiente forma:



Las funciones de proporcionalidad inversa, nunca pasan por el (0,0). Las funciones racionales, en general, suelen tener asíntotas (no las vamos a estudiar en este curso), que son rectas a las cuales la función se acerca cuando tiende al infinito pero nunca llegan a tocarlas.

Para representarlas, basta con aplicar los métodos que conocemos: tabla de valores y corte con los ejes.

7.- Funciones radicales.

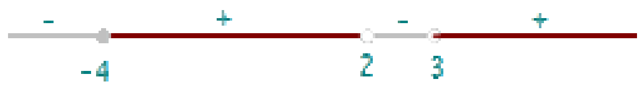
Las **funciones radicales**, también las conocemos del tema anterior y como ya sabemos, son funciones en las que la variable de definición está bajo el símbolo radical. Su dominio son los intervalos en los que el radicando es mayor o igual a cero.

Para representarlas, basta con calcular su dominio (algo que siempre debemos hacer sea cual sea la función) para saber los valores que puede tomar y finalmente dar valores formando una tabla de valores como venimos haciendo, calculando los cortes con los ejes.

Veamos un ejemplo:

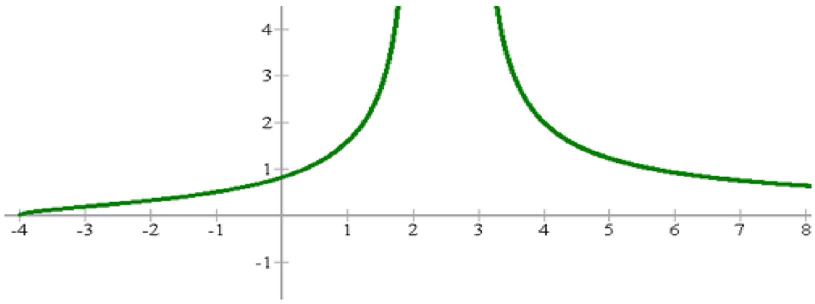
- Sea la función $f(x) = \sqrt{\frac{x+4}{x^2-5x+6}}$. Para calcular su dominio tenemos que verificar que $\frac{x+4}{x^2-5x+6} \geq 0$, por lo tanto se tiene que como el denominador no puede ser cero, $x^2 - 5x + 6 > 0$ y $x + 4 \geq 0$ por lo tanto, resolviendo la ecuación de segundo grado tenemos los valores 2 y 3, y resolviendo la segunda inecuación tenemos que $x \geq -4$.

  Representamos dichos valores en la recta formando intervalos y vamos dando valores en cada intervalos, de modo que nos quedamos con los intervalos que cumplen la condición $\frac{x+4}{x^2-5x+6} \geq 0$, en nuestro caso:



  Estos son los intervalos que nos han salido luego nuestro dominio es: $[-4,2) \cup (3,+\infty)$.

  Calculamos ahora una tabla de valores, representamos los puntos y unimos resultando:

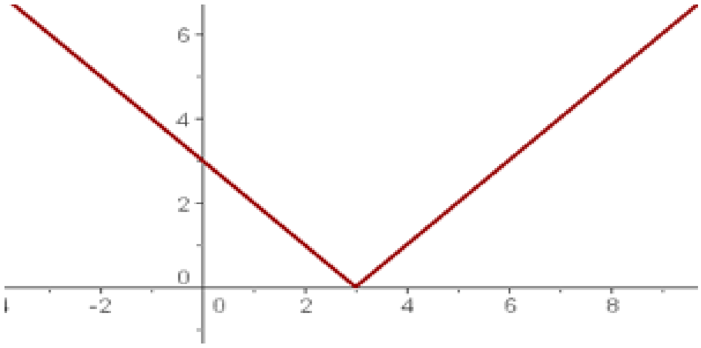


8.- Funciones a trozos.

Las **funciones a trozos**, no son más que funciones definidas de varias formas distintas en cada intervalo correspondiente, es decir, en una misma función, puede estar englobadas varios tipos de funciones cada una en un trozo distinto. Un ejemplo de función a trozo puede ser la siguiente:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < a \\ x, & x \geq a \end{cases}.$$

Esta función es muy conocida y se denomina **valor absoluto**. Lo que hace es dar a cualquier valor, sea positivo o negativo, siempre su valor positivo, por ejemplo $|-3| = 3$. Suelen tener esta forma:



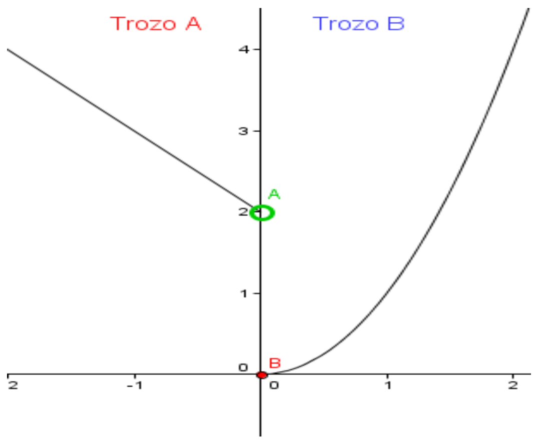
Las funciones valor absoluto siempre son continuas.

Veamos ahora un ejemplo de función a trozo que no es valor absoluto, por ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Esta función, como podemos comprobar tiene dos trozos: definimos el trozo A como $x < 0$ y el trozo B como $x \geq 0$. En el primer trozo, la función viene definida por una función lineal afín (una recta) y en el segundo trozo como una función cuadrática (parábola). Basta con representar cada una de ellas en el trozo correspondiente, tomando eso sí, los valores que su dominio (trozo), le permite.

En nuestro caso, nuestra función representada es:



Como podemos observar, no todas las funciones a trozos son continuas, en este caso, nuestra función es discontinua.

Ejercicios.

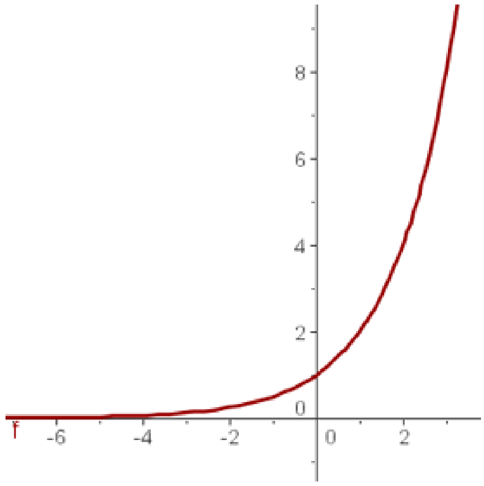
1. Representa las siguientes funciones cuadráticas:
   a) $f(x) = (x-3)^2$
   b) $f(x) = 3 - x^2$
   c) $f(x) = x^2 - 6x + 6$
2. Representa las siguiente funciones racionales:
   a) $f(x) = \frac{-1}{x}$
   b) $f(x) = \frac{2}{x-2}$
   c) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-\frac{2}{3}}$
3. Representa las siguientes funciones radicales:
   a) $f(x) = 2 - \sqrt{x}$
   b) $f(x) = -\sqrt{x-3}$
   c) $f(x) = 2\sqrt{x}$
   d) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$
4. Representa las siguientes funciones a trozos e indica cuales son continuas:
   a) $f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq -1 \\ -2, & -1 < x \leq 3. \\ x-5, & x > 3 \end{cases}$
   b) $f(x) = \begin{cases} 2x^2-5, & x \leq -3 \\ -2, & -3 < x \leq 3. \\ x-5, & x > 3 \end{cases}$
   c) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ 2, & 2 < x \leq 3. \\ x^2-6, & x > 3 \end{cases}$

9.- Función exponencial.

En temas anteriores hemos estudiado lo que son las potencias, pues bien, una **función exponencial** es una función en forma de potencia cuyo exponente es la variable de definición de mi función. Las funciones exponenciales tienen como expresión general $f(x) = a^x$, donde $a \in \mathbb{R}^+$.

Formalmente, definimos la función exponencial como aquella que a cada valor real x, le hace corresponder la potencia a^x, de base a y exponente x.

Gráficamente este tipo de funciones tienen la forma siguiente, que veremos con un ejemplo: Sea $f(x) = 2^x$.



Pasamos ahora a estudiar las propiedades que presentan este tipo de funciones.

Propiedades:

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Recorrido: $\mathbb{R}^+$
- Siempre son continuas.
- Siempre pasan por los puntos (0,1) y (1,a)
- Si $a > 1$, la función es creciente.
- Si $a < 1$, la función es decreciente.
- Las curvas $y = a^x$ e $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son simétricas con respecto al eje de ordenadas (OY)

Para representar una función exponencial, basta con verificar las distintas propiedades que presenta y posteriormente crear una tabla de valores.

Las funciones exponenciales, suelen aparecer en muchos campos de la vida cotidiana y suelen tener muchísimas aplicaciones en física y biología. Por ejemplo, el número de células de un feto mientras se desarrolla en el útero materno siguen una función exponencial.

Una curiosidad más, que puede interesar en cuanto a la relación entre estudiante y examen es aquella que dice que las dudas que surgen a un estudiante a medida que se aproxima la fecha del examen, sigue una función exponencial que alcanza sus máximos valores en las horas previas al examen.

Finalizamos el tema estudiando otra función importante con bastantes aplicaciones también, como es la función inversa a la exponencial: El logaritmo.

10.- Función logaritmo.

La **función logaritmo** se define mediante la expresión general por $f(x) = \log_a x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$, se le denomina base del logaritmo. Esta función está asociada a su inversa mediante la expresión: Si $\log_a x = y$ entonces $a^y = x$, teniendo así la expresión de una función exponencial.

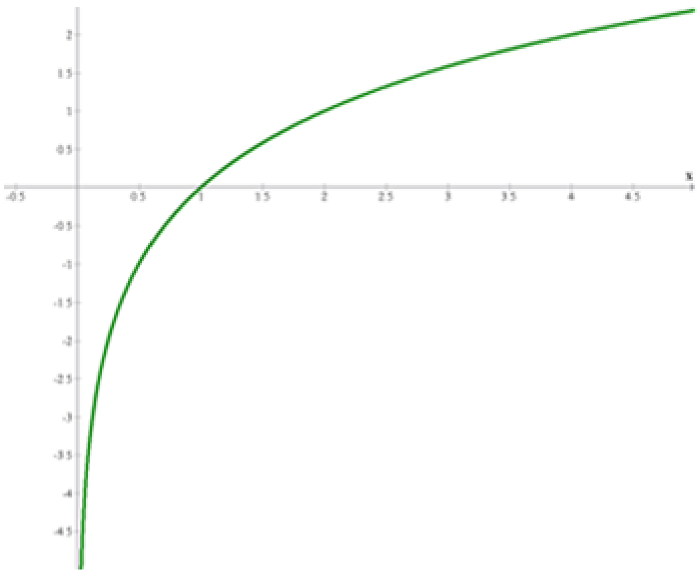
Aplicando la definición de logaritmo, que no es más que relacionar el logaritmo con la exponencial, podemos obtener fácilmente el valor de dicho logaritmo.

Veamos un ejemplo:

- Calculemos el valor de $\log_2 64$: Para ello aplicamos la definición que nos dice que podemos relacionar (expresar) el logaritmo como una función exponencial de forma que si $\log_2 64 = x$, donde x es el valor del logaritmo que queremos calcular, entonces $2^x = 64 = 2^6$, por lo tanto ¿Qué valor toma x para que se verifique lo que buscamos?, en nuestro caso $x = 6$, por lo tanto tenemos que $\log_2 64 = 6$.

Veamos un ejemplo de función logaritmo y su representación: $f(x) = \log_2 x$.

La gráfica de esta función es:



Como podemos comprobar, tiene la "forma" de una función exponencial pero "invertida".

Al ser una inversa de la otra, las propiedades son muy similares salvo algunos cambios:

Propiedades:

- Dominio: $\mathbb{R}^+$
- Recorrido: $\mathbb{R}$
- Siempre son continuas.
- Siempre pasan por los puntos (1,0) y $(a, 1)$
- Si $a > 1$, la función es creciente.
- Si $a < 1$, la función es decreciente.
- La gráfica de la función logaritmo es simétrica, con respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrante, de la función exponencial, al ser su correspondiente inversa.

Para representar este tipo de funciones, tenemos dos formas:

1. Aplicamos propiedades y mediante una tabla de valores obtenemos los puntos
2. Representamos su inversa y aplicamos la última propiedad citada.

Al igual que la función exponencial, la función logaritmo tiene bastantes aplicaciones en biología, física y economía entre otros muchos campos. Por ejemplo, la función logaritmo se utiliza para medir el pH del agua, el nivel de intensidad del sonido, el aumento de la población bacteriana o para medir en una escala de Richter un terremoto.

Ejercicios Propuestos.

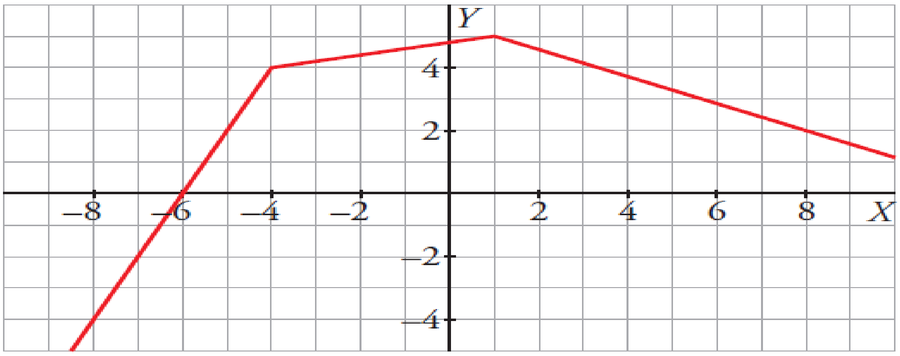
1. Representa las siguientes funciones, indicando a que tipo pertenece cada una:
   a) $f(x) = \frac{5x-16}{6}$
   b) $f(x) = 2,5$
   c) $f(x) = \log_3 5$
   d) $f(x) = 5 - 2\sqrt{12x+3}$
   e) $f(x) = 3^{-2x}$
   f) $f(x) = \frac{3x-2}{x-3}$

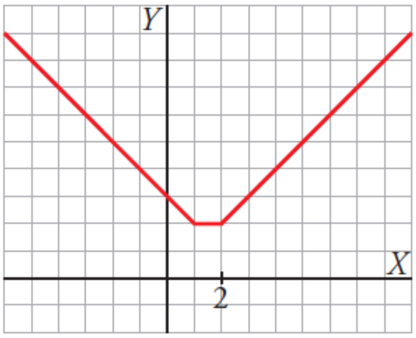
2. Representa las siguientes funciones a trozos e indica cuales son continuas:

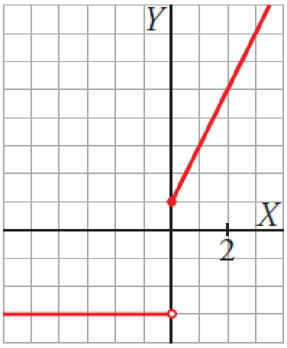
a) $f(x) = \begin{cases} 2x+5, & -3 \le x < 0 \\ 5-x, & 0 \le x < 3 \\ 2, & 3 \le x \le 8 \end{cases}$.

b) $f(x) = \begin{cases} x^2-2, & x < 1 \\ 2x-4, & x \ge 1 \end{cases}$.

3. Escribe las ecuaciones de la función que corresponde a estas gráficas. (Nota: Puede ser de ayuda consultar el tema 7):







4. Representa las funciones $f(x) = 3^x$ y $g(x) = \log_3 x$. ¿Ves alguna relación entre ellas?

5. Aplica la definición de logaritmo para calcular:

a) $\log_3 27$

b) $\log_3 \sqrt{3}$

c) $\log_4 16$

d) $\log_3 \frac{1}{3}$

6. Aplica la definición de logaritmo para calcular la base de los siguientes logaritmos:

a) $\log_b 10000 = 2$

b) $\log_b 4 = -1$

c) $\log_b 125 = 3$

d) $\log_b 3 = \frac{1}{2}$

7. Resuelve analítica y gráficamente los siguientes sistemas, siempre que tengan solución:

a) $\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

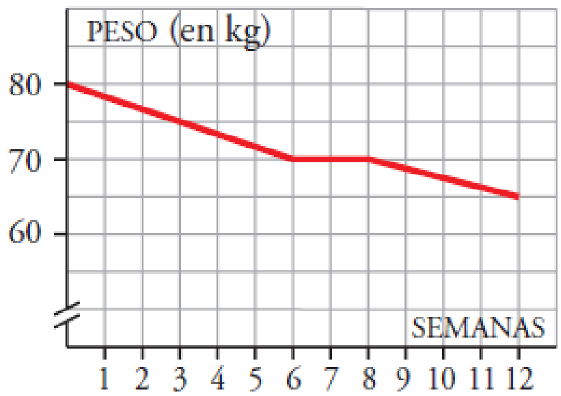
b) $\begin{cases} y = 2x^2 - 8x - 3 \\ y = x^2 - 2x - 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = -x^2 + 5x \\ y = x^2 + 3x - (\frac{15}{2}) \end{cases}$

d) $\begin{cases} y = \frac{1}{x-1} \\ y = -x + 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = \sqrt{x+1} \\ y = x - 5 \end{cases}$

8. Define una ecuación que nos dé el perímetro y el área de un cuadrado dependiendo de cuánto mide su lado y represéntalas.
9. Manuel fue a un nutricionista para perder peso, y esté le representó una gráfica para explicarle lo que espera que consiga en 12 semanas que dura su dieta:



a) ¿Cuánto pesaba Manuel al empezar la dieta?
b) ¿Cuánto tiene qué adelgazar por semanas en la primera etapa?¿Y entre la 6 y la 8?
c) Halla la expresión analítica de esta función.

10. Los gastos e ingresos anuales de una empresa por la fabricación de ordenadores vienen dado mediante las funciones $G(x) = 20000 + 250x$ y $I(x) = 600x - 0{,}1x^2$. ¿Cuántos ordenadores debemos fabricar para que el beneficio sea máximo (Beneficio=Ingresos – Gastos)?.
11. La gráfica de una función exponencial del tipo $f(x) = ka^x$ pasa por los puntos (0,3) y (1;3,6).
    a) Calcular k y a
    b) ¿Es creciente o decreciente?
    c) Representa la gráfica.
12. La parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ pasa por el origen de coordenadas y los puntos (1,3) y (4,6). Hallar los valores de a, b, c.
13. Representa la función $f(x) = 1{,}2^x$. Calcula su inversa y represéntala también.

14. Halla las gráficas de las siguientes funciones:

   a) $f(x) = |x - 2|$
   b) $f(x) = 1 + |x|$

15. Aplica la definición de logaritmo para hallar el valor x en cada caso:

   a) $\log_2(2x - 2) = 3$
   b) $\log_2 4x = 2$
   c) $\log_2(x^2 - 8) = 0$